


600015163M


PRESS
SHELF
Nº



ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

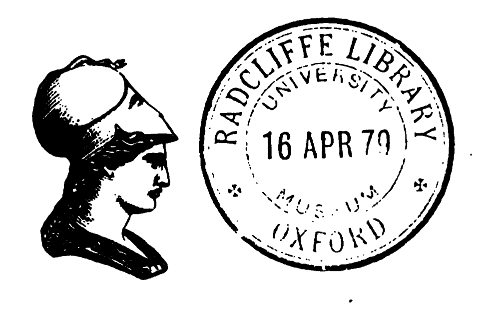
PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME PREMIER.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXVIII

AVERTISSEMENT.

Cette nouvelle édition des *OEuvres de Laplace,* publiée par les soins de sa famille, sous les auspices de l'Académie des Sciences, réunit, pour la première fois, aux divers Ouvrages compris dans les éditions précédentes, la collection des Mémoires de l'illustre Astronome, rangée par ordre chronologique.

Elle permettra de comparer la forme définitive de la pensée de l'Auteur aux études par lesquelles il s'était préparé pendant de longues années à élever le monument qui a rendu son nom inséparable de celui de Newton.

Le nouvel hommage rendu à la mémoire de Laplace est dû à l'initiative du Général marquis de Laplace, son fils, dont le testament renfermait les dispositions suivantes :

« Je veux que, sur les plus clairs deniers de ma succession,
» une somme de soixante-dix mille francs soit prélevée, pour
» être affectée à la réimpression des Ouvrages de mon père,
» dont l'édition imprimée aux frais de l'État, par la loi du
» 15 juin 1842, est à peu près épuisée.

» Je prie MM. Dumas et Élie de Beaumont, membres de
» l'Institut, dont l'attachement à la mémoire de mon père est

» si connu, de vouloir bien se charger de surveiller cette nou-
» velle édition. »

Mme la Marquise de Colbert, nièce du Général et petite-fille du grand Astronome, voulant que le témoignage de vénération rendu à la mémoire de son aïeul fût complet, a mis à la disposition de l'Académie la somme importante qu'exigeait la publication de son Œuvre entière.

M. Élie de Beaumont, Secrétaire perpétuel de l'Académie pour les Sciences mathématiques, étant décédé avant l'ouverture du testament du Général Marquis de Laplace, son successeur, M. J. Bertrand, se trouvait naturellement appelé à le remplacer dans une œuvre de surveillance pour laquelle une haute et particulière compétence le désignait d'ailleurs.

Les soins qu'exigeait ce travail considérable, long et délicat, rendaient indispensable l'active coopération de collaborateurs dévoués et offrant à la Science toutes les garanties nécessaires.

M. Puiseux, Membre de l'Académie des Sciences, et M. Houël, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, ont saisi avec empressement l'occasion de donner à la mémoire de Laplace un témoignage de leur vénération. C'est à leurs soins respectueux et à leur profonde intelligence des questions sur lesquelles s'est exercé le génie de Laplace que les astronomes et les géomètres devront reporter toute leur gratitude, lorsqu'ils reconnaîtront avec quelle scrupuleuse fidélité les textes ont été arrêtés, après des études et des comparaisons qui ont toujours permis de remonter à la vraie pensée de l'Auteur.

La partie matérielle de cette importante publication a été confiée à M. Gauthier-Villars. L'habile et consciencieux éditeur

n'a rien négligé pour que l'œuvre fût digne de la grandeur du sujet, de la gloire de l'Auteur et du sentiment pieux de la famille.

L'Académie, sur le Rapport de la Section d'Astronomie et de la Commission administrative, après avoir pris connaissance des conditions dans lesquelles devait s'accomplir ce travail et des soins dont il était entouré, a décidé, dans la Séance du 16 juillet 1877, que la nouvelle édition serait publiée sous ses auspices et sous sa responsabilité. Les deux Secrétaires perpétuels demeurent, en conséquence, chargés de poursuivre officiellement désormais une mission confiée d'abord à titre privé, par le Général Marquis de Laplace, à l'affection de MM. Dumas et Élie de Beaumont.

NOTICE

SUR

LE GÉNÉRAL MARQUIS DE LAPLACE.

Le Général Marquis de Laplace (Charles-Émile-Pierre-Joseph), né à Paris, le 15 avril 1789, fils de l'illustre astronome, avait choisi la carrière militaire. Élève de l'École Polytechnique et de l'École de Metz, il entrait en 1809, à l'âge de vingt ans, au 2e régiment d'artillerie.

La haute situation de son père, entouré du respect universel, chancelier du Sénat et considéré par Napoléon Ier comme l'une des gloires de son époque et de son Empire, lui aurait rendu facile l'accès des voies paisibles et sans péril de la diplomatie ou de l'administration; il préféra le métier des armes avec les privations, les fatigues et les dangers que ne devaient pas lui épargner les campagnes d'Allemagne, de Russie et de France, pendant lesquelles il s'élevait, par ses services, du grade de sous-lieutenant à celui de chef d'escadron.

Son âme ferme, son amour du devoir et son respect pour la discipline l'avaient préparé à rechercher les périls et à comprendre les obligations de la vie des camps, dans laquelle il avait débuté muni des témoignages de l'affection éclairée et prévoyante de son père :

« C'est avec bien du regret, mon ami », lui écrivait celui-ci, le 17 juin 1809, « que je te vois partir de Metz sans que je puisse t'em-

» brasser et te donner ma bénédiction. J'espère que tu te feras hon- » neur dans la noble carrière que tu vas parcourir.

» Tu seras ma consolation et celle de ta mère. Je prie Dieu qu'il » veille sur tes jours. Aie-le toujours présent à ta pensée, ainsi que » ton père et ta mère. Songe que de toi dépend principalement notre » bonheur.

» Malheureusement, retenu à Paris par mes fonctions, je ne puis » te témoigner que par écrit combien je t'aime et combien je désire » que tu te distingues en servant utilement ton pays. »

Sous tous les rapports, les vœux du grand Astronome furent exaucés, et lorsque, à sa mort, son fils lui succédait à la Chambre des Pairs, en 1827, il était déjà parvenu au grade de colonel dans l'arme de l'artillerie.

Après avoir exercé divers commandements, et notamment à l'École de la Fère et à Vincennes, il fut nommé Général de division en 1843. A partir de cette époque, soit par les inspections générales dont il était chargé chaque année, soit par sa coopération active aux travaux du Comité d'Artillerie, dont il était Membre, il contribua avec une ardeur patriotique et convaincue à toutes les améliorations qui ont successivement transformé le matériel de l'artillerie, l'armement de nos places fortes et la défense de nos côtes.

Jusqu'à la fin de sa carrière, le Général de Laplace a consacré sa vie au culte de la mémoire de son glorieux père, aux soins qu'il rendait à sa mère, parvenue aux dernières limites de l'âge avec toute la vivacité de son rare esprit et toutes les bienveillances de son cœur généreux, à l'armée enfin, à laquelle, au milieu des troubles politiques, il se rattachait toujours en serviteur fidèle et dévoué.

A la Chambre des Pairs et au Sénat, si son rang dans l'armée l'appelait souvent à prendre part à la discussion des projets ayant trait à la constitution militaire de la France ou à l'organisation de nos troupes, son nom le signalait naturellement, dès qu'il s'agissait de questions de nature à intéresser les Sciences.

Si le Système métrique français, à la création duquel son illustre père avait pris une part prépondérante, s'est établi définitivement dans notre pays et s'il s'est étendu chez la plupart des nations civilisées, il serait injuste d'oublier qu'on le doit en grande partie à ses soins persévérants. Mettant tour à tour en jeu l'influence que sa situation élevée dans l'État lui assurait auprès des représentants des pouvoirs publics, et la confiance qu'il inspirait aux représentants de la Science, excitant les uns et soutenant les autres, il parvint à garantir au Système métrique sa place définitive dans nos lois et à faire passer son usage habituel dans nos mœurs.

Les rapports qui existent entre le Système métrique et le Système monétaire avaient amené le Général de Laplace à porter une attention particulière sur toutes les questions que soulèvent la fabrication et la circulation des monnaies. Sa parole sur ces sujets, considérés pendant longtemps comme entourés de mystère, était toujours écoutée avec faveur et souvent décisive dans le débat. Il s'attachait avec une persévérance infatigable à maintenir le système monétaire en concordance absolue avec le système décimal.

Le Général de Laplace était l'homme du devoir. Ses habitudes simples, son caractère bienveillant, la douceur et la sûreté de son commerce l'avaient entouré dans l'armée, à la Chambre des Pairs et au Sénat, d'un respect qui, provoqué par son nom d'abord, s'adressait bientôt plus particulièrement à sa personne. Dans ce milieu du monde de la guerre ou de la politique, où sa destinée l'avait conduit, le nombre des admirateurs compétents des immortelles Œuvres de son père n'était pas grand; mais le culte intérieur qu'il portait à sa mémoire n'avait pas besoin d'être entretenu par des manifestations étrangères. Il aimait à se retirer dans cette maison d'Arcueil et à se recueillir près de ce modeste cabinet de travail, témoins respectés de tant de labeurs et de veilles, point de départ de tant de sublimes conceptions.

Après les événements de 1870, le Général de Laplace s'était éloigné du monde et s'était concentré dans ses souvenirs; il fut enlevé à sa famille et à ses amis le 27 octobre 1874, à la suite d'une longue maladie.

Mme de Laplace avait voulu, en 1842, consacrer une part de son patrimoine à publier une édition des Œuvres de son illustre époux; le Gouvernement ne permit pas ce sacrifice; il jugea qu'il appartenait à la France, assez riche alors pour payer sa gloire, d'acquitter la dette de la Science et celle de la Nation. L'édition fut publiée aux frais de l'État.

Le Général Marquis de Laplace n'a pas accepté que, trente ans après, une semblable libéralité fût imposée au pays épuisé par ses malheurs; il n'a pas voulu cependant que les nouvelles générations fussent privées des grands enseignements que les Œuvres de son père offrent aux intelligences élevées, et, par une disposition qui atteste quelles furent les préoccupations constantes de sa vie, il a confié à sa famille et à deux de ses amis le soin d'élever encore une fois un monument à la mémoire de son glorieux père, par la publication complète de ses Œuvres, mais à ses frais et sur ses propres ressources. L'Académie s'est empressée de réclamer sa part dans l'accomplissement de ce devoir.

La Science, dans sa reconnaissance, n'oubliera jamais que c'est au Général de Laplace et à Mme la Marquise de Colbert qu'elle doit de pouvoir contempler dans leur ensemble les travaux de l'émule de Newton.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

QUATRIÈME ÉDITION,

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS L'ÉDITION PRINCEPS DE 1798-1825.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE PREMIER VOLUME.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

DES LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

LIVRE II.

DE LA LOI DE LA PESANTEUR UNIVERSELLE ET DU MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ DES CORPS CÉLESTES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

Newton publia, vers la fin du dernier siècle, la découverte de la pesanteur universelle. Depuis cette époque, les Géomètres sont parvenus à ramener à cette grande loi de la nature tous les phénomènes connus du Système du monde, et à donner ainsi aux théories et aux Tables astronomiques une précision inespérée. Je me propose de présenter sous un même point de vue ces théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et dont l'ensemble, embrassant tous les résultats de la gravitation universelle sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, forme la *Mécanique céleste*. L'Astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problème de Mécanique, dont les éléments des mouvements célestes sont les arbitraires; sa solution dépend à la fois de l'exactitude des observations et de la perfection de l'Analyse, et il importe extrêmement d'en bannir tout empirisme et de la réduire à n'emprunter de l'observation que les données indispensables. C'est à remplir, autant qu'il m'a été possible, un objet aussi intéressant, que cet Ouvrage est destiné. Je désire qu'en considération de l'importance et des difficultés de la matière, les Géomètres et les Astronomes le reçoivent avec in-

dulgence, et qu'ils en trouvent les résultats assez simples pour les employer dans leurs recherches. Il sera divisé en deux Parties. Dans la première, je donnerai les méthodes et les formules pour déterminer les mouvements des centres de gravité des corps célestes, la figure de ces corps, les oscillations des fluides qui les recouvrent, et leurs mouvements autour de leurs propres centres de gravité. Dans la seconde Partie, j'appliquerai les formules trouvées dans la première aux planètes, aux satellites et aux comètes; je la terminerai par l'examen de diverses questions relatives au Système du monde et par une Notice historique des travaux des Géomètres sur cette matière. J'adopterai la division décimale de l'angle droit et du jour, et je rapporterai les mesures linéaires à la longueur du mètre, déterminée par l'arc du méridien terrestre compris entre Dunkerque et Barcelone.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MOUVEMENTS ET DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

LIVRE PREMIER.

DES LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

Je vais établir dans ce Livre les principes généraux de l'équilibre et du mouvement des corps, et résoudre les problèmes de Mécanique, dont la solution est indispensable dans la théorie du Système du monde.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE LA COMPOSITION DES FORCES QUI AGISSENT SUR UN POINT MATÉRIEL.

1. Un corps nous paraît se mouvoir, lorsqu'il change de situation par rapport à un système de corps que nous jugeons en repos; mais, comme tous les corps, ceux même qui nous semblent jouir du repos le plus absolu, peuvent être en mouvement, on imagine un espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière : c'est aux parties de cet espace réel ou idéal que nous rapportons par la pensée la position des corps, et nous les concevons en mouvement lorsqu'ils répondent successivement à divers lieux de l'espace.

La nature de cette modification singulière, en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre, est et sera toujours inconnue : on l'a désignée sous le nom de *force*, on ne peut déterminer que ses effets et les lois de son action. L'effet d'une force agissant sur un point matériel est de le mettre en mouvement, si rien ne s'y op-

pose; la direction de la force est la droite qu'elle tend à lui faire décrire. Il est visible que, si deux forces agissent dans le même sens, elles s'ajoutent l'une à l'autre, et que, si elles agissent en sens contraire, le point ne se meut qu'en vertu de leur différence. Si leurs directions forment un angle entre elles, il en résulte une force dont la direction est moyenne entre celles des forces composantes. Voyons quelle est cette résultante et sa direction.

Pour cela, considérons deux forces x et y, agissant à la fois sur un point matériel M et formant entre elles un angle droit. Soient z leur résultante, et θ l'angle qu'elle fait avec la direction de la force x; les deux forces x et y étant données, l'angle θ sera déterminé, ainsi que la résultante z, en sorte qu'il existe entre les trois quantités x, z et θ une relation qu'il s'agit de connaître.

Supposons d'abord les forces x et y infiniment petites et égalées aux différentielles dx et dy; supposons ensuite que, x devenant successivement dx, $2dx$, $3dx, \ldots$, y devienne dy, $2dy$, $3dy, \ldots$; il est clair que l'angle θ sera toujours le même, et que la résultante z deviendra successivement dz, $2dz$, $3dz, \ldots$; ainsi, dans les accroissements successifs des trois forces x, y et z, le rapport de x à z sera constant et pourra être exprimé par une fonction de θ, que nous désignerons par $\varphi(\theta)$; on aura donc $x = z\varphi(\theta)$, équation dans laquelle on peut changer x en y, pourvu que l'on y change semblablement l'angle θ dans $\frac{\pi}{2} - \theta$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Maintenant, on peut considérer la force x comme la résultante de deux forces x' et x'', dont la première x' est dirigée suivant la résultante z, et dont la seconde x'' est perpendiculaire à cette résultante. La force x, qui résulte de ces deux nouvelles forces, formant l'angle θ avec la force x' et l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec la force x'', on aura

$$x' = x\varphi(\theta) = \frac{x^2}{z}, \quad x'' = x\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{xy}{z};$$

on peut donc substituer ces deux forces à la force x. On peut substi-

tuer pareillement à la force y deux nouvelles forces y' et y'', dont la première est égale à $\frac{y^2}{z}$ et dirigée suivant z, et dont la seconde est égale à $\frac{xy}{z}$ et perpendiculaire à z; on aura ainsi, au lieu des deux forces x et y, les quatre suivantes

$$\frac{x^2}{z}, \quad \frac{y^2}{z}, \quad \frac{xy}{z}, \quad \frac{xy}{z};$$

les deux dernières, agissant en sens contraire, se détruisent; les deux premières, agissant dans le même sens, s'ajoutent et forment la résultante z; on aura donc

$$x^2+y^2=z^2;$$

d'où il suit que la résultante des deux forces x et y est représentée, pour la quantité, par la diagonale du rectangle dont les côtés représentent ces forces.

Déterminons présentement l'angle θ. Si l'on fait croître la force x, de la différentielle dx, sans faire varier la force y, cet angle diminuera d'une quantité infiniment petite $d\theta$; or on peut concevoir la force dx décomposée en deux, l'une dx' dirigée suivant z, et l'autre dx'' perpendiculaire à z; le point M sera donc alors sollicité par les deux forces $z+dx'$ et dx'' perpendiculaires entre elles, et la résultante de ces deux forces, que nous nommerons z', fera avec dx'' l'angle $\frac{\pi}{2}-d\theta$; on aura ainsi, par ce qui précède,

$$dx''=z'\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}-d\theta\right);$$

la fonction $\varphi\left(\frac{\pi}{2}-d\theta\right)$ est par conséquent infiniment petite et de la forme $-k\,d\theta$, k étant une constante indépendante de l'angle θ; on a donc

$$\frac{dx''}{z'}=-k\,d\theta.$$

z' est, à un infiniment petit près, égal à z; de plus, dx'' formant avec

dx l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, on a

$$dx'' = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) dx = \frac{y\,dx}{z},$$

partant

$$d\theta = -\frac{y\,dx}{kz^2}.$$

Si l'on fait varier la force y de dy, en supposant x constant, on aura la variation correspondante de l'angle θ, en changeant dans l'équation précédente x en y, y en x, et θ dans $\frac{\pi}{2} - \theta$; ce qui donne

$$d\theta = \frac{x\,dy}{kz^2};$$

en faisant donc varier à la fois x et y, la variation totale de l'angle θ sera $\frac{x\,dy - y\,dx}{kz^2}$, et l'on aura

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{z^2} = k\,d\theta.$$

Substituant pour z^2 sa valeur $x^2 + y^2$ et intégrant, on aura

$$\frac{y}{x} = \text{tang}(k\theta + \rho),$$

ρ étant une constante arbitraire. Cette équation, combinée avec celle-ci $x^2 + y^2 = z^2$, donne

$$x = z\cos(k\theta + \rho).$$

Il ne s'agit plus que de connaître les deux constantes k et ρ; or, si l'on suppose y nul, on a évidemment $z = x$ et $\theta = 0$; donc $\cos\rho = 1$ et $x = z\cos k\theta$. Si l'on suppose x nul, on a $z = y$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$; $\cos k\theta$ étant alors égal à zéro, k doit être égal à $2n + 1$, n étant un nombre entier, et dans ce cas x sera nul toutes les fois que θ sera égal à $\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1}$; mais, x étant nul, on a évidemment $\theta = \frac{1}{2}\pi$; donc $2n + 1 = 1$, ou $n = 0$, et, par conséquent,

$$x = z\cos\theta.$$

De là il suit que la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent les deux forces x et y représente non-seulement la quantité, mais encore la direction de leur résultante. Ainsi l'on peut, à une force quelconque, substituer deux autres forces qui forment les côtés d'un rectangle dont elle est la diagonale; et il est facile d'en conclure que l'on peut décomposer une force en trois autres qui forment les côtés d'un parallélépipède rectangle dont elle est la diagonale.

Soient donc a, b, c les trois coordonnées rectangles de l'extrémité de la droite qui représente une force quelconque, et dont l'origine est celle des coordonnées; cette force sera exprimée par la fonction $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, et, en la décomposant parallèlement aux axes des a, des b et des c, les forces partielles seront exprimées respectivement par ces coordonnées.

Soient a', b', c' les coordonnées d'une seconde force; $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$ seront les coordonnées de la résultante des deux forces, et représenteront les forces partielles dans lesquelles on peut la décomposer parallèlement aux trois axes; d'où il est aisé de conclure que cette résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces.

En général, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'';... étant les coordonnées d'un nombre quelconque de forces, $a+a'+a''+\ldots$, $b+b'+b''+\ldots$, $c+c'+c''+\ldots$ seront les coordonnées de la résultante, dont le carré sera la somme des carrés de ces dernières coordonnées; on aura donc ainsi la grandeur et la position de cette résultante.

2. D'un point quelconque de la direction d'une force S, point que nous prendrons pour l'origine de cette force, menons au point matériel M une droite, que nous nommerons s; soient x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du point M, et a, b, c les coordonnées de l'origine de la force; on aura

$$s=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Si l'on décompose la force S parallèlement aux axes des x, des y et

des s, les forces partielles correspondantes seront, par le numéro précédent,

$$S\frac{x-a}{s},\quad S\frac{y-b}{s},\quad S\frac{z-c}{s},\quad \text{ou}\quad S\frac{\partial s}{\partial x},\quad S\frac{\partial s}{\partial y},\quad S\frac{\partial s}{\partial z},$$

$\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$ exprimant, suivant la notation reçue, les coefficients des variations δx, δy, δz, dans la variation de l'expression précédente de s.

Si l'on nomme pareillement s' la distance de M à un point quelconque de la direction d'une autre force S', pris pour l'origine de cette force, $S'\frac{\partial s'}{\partial x}$ sera cette force décomposée parallèlement à l'axe des x, et ainsi de suite; la somme des forces S, S', S'',..., décomposées parallèlement à cet axe, sera donc $\Sigma S\frac{\partial s}{\partial x}$, la caractéristique Σ des intégrales finies exprimant ici la somme des termes $S\frac{\partial s}{\partial x}$, $S'\frac{\partial s'}{\partial x}$, ...

Soient V la résultante de toutes les forces S, S',..., et u la distance du point M à un point de la direction de cette résultante, pris pour son origine; $V\frac{\partial u}{\partial x}$ sera l'expression de cette résultante décomposée parallèlement à l'axe des x; on aura donc, par le numéro précédent,

$$V\frac{\partial u}{\partial x}=\Sigma S\frac{\partial s}{\partial x}.$$

On aura pareillement

$$V\frac{\partial u}{\partial y}=\Sigma S\frac{\partial s}{\partial y},\quad V\frac{\partial u}{\partial z}=\Sigma S\frac{\partial s}{\partial z};$$

d'où l'on tire, en multipliant respectivement ces trois équations par δx, δy, δz, et en les ajoutant ensemble,

$$(a)\qquad V\delta u=\Sigma S\delta s;$$

cette dernière équation ayant lieu, quelles que soient les variations δx, δy, δz, elle équivaut aux trois précédentes. Si son second membre est la variation exacte d'une fonction φ, on aura $V\delta u=\delta\varphi$, et par conséquent

$$V\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

c'est-à-dire que la somme de toutes les forces S, S',..., décomposées parallèlement à l'axe des x, est égale à la différence partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ce cas a généralement lieu lorsque ces forces sont respectivement fonctions de la distance de leur origine au point M. Alors, pour avoir la résultante de toutes ces forces, décomposée parallèlement à une droite quelconque, on prendra l'intégrale $\Sigma\int S\,\delta s$, et, en nommant φ cette intégrale, on la considérera comme une fonction de x et de deux autres droites perpendiculaires entre elles et à x; la différence partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ sera la résultante des forces S, S',..., décomposée parallèlement à la droite x.

3. Lorsque le point M est en équilibre en vertu de toutes les forces qui le sollicitent, leur résultante est nulle, et l'équation (a) devient

$$(b) \qquad o = \Sigma\,S\delta s,$$

c'est-à-dire que, dans le cas de l'équilibre d'un point sollicité par un nombre quelconque de forces, la somme des produits de chaque force par l'élément de sa direction est nulle.

Si le point M est forcé d'être sur une surface courbe, il éprouvera de sa part une réaction, que nous désignerons par R. Cette réaction est égale et directement contraire à la pression que le point exerce sur la surface; car, en le concevant animé des deux forces R et —R, on peut supposer que la force —R est détruite par la réaction de la surface, et qu'ainsi le point M presse la surface avec la force —R. Or la force de pression d'un point sur une surface lui est perpendiculaire; autrement elle pourrait se décomposer en deux, l'une perpendiculaire à la surface, et qui serait détruite par elle, l'autre parallèle à la surface, et en vertu de laquelle le point n'aurait point d'action sur cette surface, ce qui est contre la supposition; en nommant donc r la perpendiculaire menée par le point M à la surface, et terminée à un point quelconque de sa direction, la force R sera dirigée suivant cette perpendiculaire : il faudra donc ajouter $R\,\delta r$ au second membre de l'équation (b), qui devient ainsi

$$(c) \qquad o = \Sigma\,S\delta s + R\,\delta r;$$

— R étant alors la résultante de toutes les forces S, S',..., elle est perpendiculaire à la surface.

Si l'on suppose que les variations arbitraires δx, δy, δz appartiennent à la surface courbe sur laquelle le point est assujetti, on a, par la nature de la perpendiculaire à cette surface, $\delta r = 0$, ce qui fait disparaître $R\delta r$ de l'équation précédente : l'équation (b) a donc encore lieu dans ce cas, pourvu que l'on élimine l'une des trois variations δx, δy, δz au moyen de l'équation à la surface; mais alors l'équation (b), qui dans le cas général équivaut à trois équations, n'équivaut plus qu'à deux équations distinctes, que l'on obtient en égalant séparément à zéro les coefficients des deux différentielles restantes. Soit $u = 0$ l'équation de la surface; les deux équations $\delta r = 0$ et $\delta u = 0$ auront lieu en même temps, ce qui exige que δr soit égal à $N\delta u$, N étant fonction de x, y, z. Pour la déterminer, nommons a, b, c les coordonnées de l'origine de r; on aura

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

d'où l'on tire $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 1$, et par conséquent

$$N^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] = 1;$$

en faisant donc

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

le terme $R\delta r$ de l'équation (c) se changera dans $\lambda\delta u$, et cette équation deviendra

$$0 = \Sigma S\delta s + \lambda\delta u,$$

équation dans laquelle on doit égaler séparément à zéro les coefficients des variations δx, δy, δz, ce qui donne trois équations; mais elles n'équivalent qu'à deux équations entre x, y, z, à cause de l'indéterminée λ qu'elles renferment. On peut donc, au lieu d'éliminer de l'équation (b) une des variations δx, δy, δz au moyen de l'équation différentielle à la surface, lui ajouter cette équation multipliée par une indéterminée λ,

et considérer alors les variations δx, δy, δz comme indépendantes. Cette méthode, qui résulte encore de la théorie de l'élimination, réunit à l'avantage de simplifier le calcul celui de faire connaître la pression $-$R que le point M exerce contre la surface.

Concevons ce point renfermé dans un canal à simple ou à double courbure; il éprouvera de la part de ce canal une réaction que nous désignerons par k, et qui sera égale et directement contraire à la pression que le point exerce contre le canal, et dont la direction sera perpendiculaire au côté du canal. Or la courbe formée par ce canal est l'intersection de deux surfaces dont les équations expriment sa nature; on peut donc considérer la force k comme la résultante des deux réactions R et R′ que le point M éprouve de la part de chacune des surfaces, puisque, les directions des trois forces R, R′ et k étant perpendiculaires au côté de la courbe, elles sont dans un même plan. En nommant ainsi δr et $\delta r'$ les éléments des directions des forces R et R′, directions respectivement perpendiculaires à chaque surface, il faudra ajouter à l'équation (b) les deux termes $R\,\delta r$ et $R'\,\delta r'$, ce qui la change dans celle-ci

$$(d) \qquad o = \Sigma S\,\delta s + R\,\delta r + R'\,\delta r'.$$

Si l'on détermine les variations δx, δy, δz de manière qu'elles appartiennent à la fois aux deux surfaces, et par conséquent à la courbe formée par le canal, δr et $\delta r'$ seront nuls, et l'équation précédente se réduira à l'équation (b), qui par conséquent a encore lieu dans le cas où le point M est assujetti à se mouvoir dans un canal; pourvu qu'au moyen des deux équations qui expriment la nature de ce canal, on fasse disparaître deux des variations δx, δy, δz.

Supposons que $u = o$ et $u' = o$ soient les équations de deux surfaces dont l'intersection forme le canal; si l'on fait

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\lambda' = \frac{R'}{\sqrt{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2}},$$

l'équation (d) deviendra

$$o = \Sigma S \delta s + \lambda \delta u + \lambda' \delta u',$$

équation dans laquelle on égalera séparément à zéro les coefficients de chacune des variations δx, δy, δz; on aura ainsi trois équations au moyen desquelles on déterminera les valeurs de λ et de λ', qui donneront les réactions R et R' des deux surfaces; et, en les composant, on aura la réaction k du canal sur le point M, et par conséquent la pression que ce point exerce contre le canal. Cette réaction, décomposée parallèlement à l'axe des x, est égale à

$$R\frac{\partial r}{\partial x} + R'\frac{\partial r'}{\partial x}, \quad \text{ou à} \quad \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda'\frac{\partial u'}{\partial x};$$

les équations de condition $u = o$, $u' = o$, auxquelles le mouvement du point M est assujetti, expriment donc, au moyen des différences partielles des fonctions qui sont nulles en vertu de ces équations, les résistances que le mobile éprouve en vertu des conditions de son mouvement.

On voit, par ce qui précède, que l'équation (b) de l'équilibre a généralement lieu, pourvu que l'on assujettisse les variations δx, δy, δz aux conditions de l'équilibre. Cette équation peut se traduire dans le principe suivant :

Si l'on fait varier infiniment peu la position du point M, *en sorte qu'il reste toujours sur la surface ou sur la courbe qu'il doit suivre s'il n'est pas entièrement libre, la somme des forces qui le sollicitent, multipliées chacune par l'espace que le point parcourt suivant sa direction, est égale à zéro, dans le cas de l'équilibre.*

Les variations δx, δy, δz étant supposées arbitraires et indépendantes, on peut dans l'équation (a) substituer aux coordonnées x, y, z trois autres quantités qui en soient fonctions, et égaler les coefficients des variations de ces quantités à zéro. Nommons ainsi ρ le rayon mené de l'origine des coordonnées à la projection du point M sur le plan des x et des y, et ϖ l'angle formé par ρ et par l'axe des x; nous aurons

$$x = \rho\cos\varpi, \quad y = \rho\sin\varpi.$$

En considérant donc, dans l'équation (a), u, s, s',... comme fonctions de ρ, ϖ et z, et comparant les coefficients de $\delta\varpi$, on aura

$$(e) \qquad V\frac{\partial u}{\partial\varpi} = \Sigma S\frac{\partial s}{\partial\varpi};$$

$\frac{V}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varpi}$ est l'expression de la force V décomposée suivant l'élément $\rho\,\delta\varpi$. Soit V′ cette force décomposée parallèlement au plan des x et des y, et p la perpendiculaire abaissée de l'axe des z sur la direction de V′, parallèlement au même plan; $\frac{pV'}{\rho}$ sera une seconde expression de la force V décomposée suivant l'élément $\rho\,\delta\varpi$; on aura donc

$$pV' = V\frac{\partial u}{\partial\varpi}.$$

Si l'on conçoit la force V′ appliquée à l'extrémité de la perpendiculaire p, elle tendra à la faire tourner autour de l'axe des z; le produit de cette force par la perpendiculaire est ce que l'on nomme *moment* de la force V par rapport à l'axe des z; ce moment est donc égal à $V\frac{\partial u}{\partial\varpi}$; et il résulte de l'équation (e) que le moment de la résultante d'un nombre quelconque des forces est égal à la somme des moments de ces forces.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

4. Un point en repos ne peut se donner aucun mouvement, puisqu'il ne renferme pas en lui-même de raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Lorsqu'il est sollicité par une force quelconque, et ensuite abandonné à lui-même, il se meut constamment d'une manière uniforme dans la direction de cette force, s'il n'éprouve aucune résistance. Cette tendance de la matière à persévérer dans son état de mouvement ou de repos est ce que l'on nomme *inertie*. C'est la première loi du mouvement des corps.

La direction du mouvement en ligne droite suit évidemment de ce qu'il n'y a aucune raison pour que le point s'écarte plutôt à droite qu'à gauche de sa direction primitive; mais l'uniformité de son mouvement n'est pas de la même évidence. La nature de la force motrice étant inconnue, il est impossible de savoir *a priori* si cette force doit se conserver sans cesse. A la vérité, un corps étant incapable de se donner aucun mouvement à lui-même, il paraît également incapable d'altérer celui qu'il a reçu; en sorte que la loi d'inertie est au moins la plus naturelle et la plus simple que l'on puisse imaginer; elle est d'ailleurs confirmée par l'expérience : en effet, nous observons sur la Terre que les mouvements se perpétuent plus longtemps, à mesure que les obstacles qui s'y opposent viennent à diminuer; ce qui nous porte à croire que, sans ces obstacles, ils dureraient toujours. Mais l'inertie de la matière est principalement remarquable dans les mouvements célestes, qui, depuis un

grand nombre de siècles, n'ont point éprouvé d'altération sensible. Ainsi nous regarderons l'inertie comme une loi de la nature, et, lorsque nous observerons de l'altération dans le mouvement d'un corps, nous supposerons qu'elle est due à l'action d'une cause étrangère.

Dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps; mais les temps employés à décrire un espace déterminé sont plus ou moins longs, suivant la grandeur de la force motrice. Ces différences ont fait naître l'idée de *vitesse*, qui, dans le mouvement uniforme, est le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir; ainsi, s représentant l'espace, t le temps et v la vitesse, on a $v = \frac{s}{t}$. Le temps et l'espace étant des quantités hétérogènes, et par conséquent incomparables, on choisit un intervalle de temps déterminé, tel que la seconde, pour unité de temps; on choisit pareillement une unité d'espace, telle que le mètre; et alors l'espace et le temps sont des nombres abstraits, qui expriment combien ils renferment d'unités de leur espèce, et qui peuvent être comparés l'un à l'autre. La vitesse devient ainsi le rapport de deux nombres abstraits, et son unité est la vitesse du corps qui parcourt un mètre dans une seconde.

5. La force n'étant connue que par l'espace qu'elle fait décrire dans un temps déterminé, il est naturel de prendre cet espace pour sa mesure; mais cela suppose que plusieurs forces, agissant dans le même sens, feront parcourir un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément, ou, ce qui revient au même, que la force est proportionnelle à la vitesse. C'est ce que nous ne pouvons pas savoir *a priori*, vu notre ignorance sur la nature de la force motrice; il faut donc encore, sur cet objet, recourir à l'expérience; car tout ce qui n'est pas une suite nécessaire du peu de données que nous avons sur la nature des choses n'est pour nous qu'un résultat de l'observation.

Nommons v la vitesse de la Terre, commune à tous les corps qui sont à sa surface. Soit f la force dont un de ces corps M est animé en vertu de cette vitesse, et supposons que $v = f\varphi(f)$ soit la relation qui existe

entre la vitesse et la force, $\varphi(f)$ étant une fonction de f, qu'il faut déterminer par l'expérience. Soient a, b, c les trois forces partielles dans lesquelles la force f se décompose parallèlement à trois axes perpendiculaires entre eux. Concevons ensuite le mobile M sollicité par une nouvelle force f', qui se décompose en trois autres a', b', c', parallèles aux mêmes axes. Les forces dont ce mobile sera animé suivant ces axes seront $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$; et, en nommant F la force unique qui en résulte, on aura, par ce qui précède,

$$F = \sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2+(c+c')^2}.$$

Si l'on nomme U la vitesse correspondante à F, $\frac{(a+a')U}{F}$ sera cette vitesse décomposée parallèlement à l'axe des a; ainsi la vitesse relative du mobile sur la Terre sera, parallèlement à cet axe,

$$\frac{(a+a')U}{F} - \frac{av}{f}, \quad \text{ou} \quad (a+a')\varphi(F) - a\varphi(f).$$

Les forces les plus considérables que nous puissions imprimer aux corps à la surface de la Terre étant beaucoup plus petites que celles dont ils sont animés en vertu du mouvement de la Terre, nous pouvons considérer a', b', c' comme des quantités infiniment petites relativement à f; nous aurons ainsi

$$F = f + \frac{aa'+bb'+cc'}{f}, \quad \text{et} \quad \varphi(F) = \varphi(f) + \frac{(aa'+bb'+cc')}{f}\varphi'(f),$$

$\varphi'(f)$ étant la différentielle de $\varphi(f)$ divisée par df. La vitesse relative de M, suivant l'axe des a, deviendra ainsi

$$a'\varphi(f) + \frac{a}{f}(aa'+bb'+cc')\varphi'(f).$$

Ses vitesses relatives, suivant les axes des b et des c, seront

$$b'\varphi(f) + \frac{b}{f}(aa'+bb'+cc')\varphi'(f),$$

$$c'\varphi(f) + \frac{c}{f}(aa'+bb'+cc')\varphi'(f).$$

La position des axes des a, des b et des c étant arbitraire, nous pouvons prendre la direction de la force imprimée pour l'axe des a, et alors b' et c' seront nuls; les vitesses relatives précédentes se changent dans celles-ci

$$a'\left[\varphi(f) + \frac{a^2}{f}\varphi'(f)\right], \quad \frac{ab}{f}a'\varphi'(f), \quad \frac{ac}{f}a'\varphi'(f).$$

Si $\varphi'(f)$ n'est pas nul, le mobile, en vertu de la force imprimée a', aura une vitesse relative perpendiculaire à la direction de cette force, pourvu que b et c ne soient pas nuls, c'est-à-dire, pourvu que la direction de cette force ne coïncide pas avec celle du mouvement de la Terre. Ainsi, en concevant qu'un globe en repos sur un plan horizontal très-uni vienne à être frappé par la base d'un cylindre droit, mû suivant la direction de son axe supposé horizontal, le mouvement relatif apparent du globe ne serait point parallèle à cet axe dans toutes les positions de l'axe par rapport à l'horizon. Voilà donc un moyen simple de reconnaître par l'expérience si $\varphi'(f)$ a une valeur sensible sur la Terre; mais les expériences les plus précises ne font apercevoir, dans le mouvement apparent du globe, aucune déviation de la direction de la force imprimée; d'où il suit que sur la Terre $\varphi'(f)$ est nul à très-peu près. Sa valeur, pour peu qu'elle fût sensible, se manifesterait principalement dans la durée des oscillations du pendule, durée qui serait différente suivant la position du plan de son mouvement par rapport à la direction du mouvement de la Terre. Les observations les plus exactes ne laissant apercevoir aucune différence semblable, nous devons en conclure que $\varphi'(f)$ est insensible et peut être supposé nul sur la Terre.

Si l'équation $\varphi'(f) = 0$ avait lieu quelle que soit la force f, $\varphi(f)$ serait constant, et la vitesse serait proportionnelle à la force; elle lui serait encore proportionnelle si la fonction $\varphi(f)$ n'était composée que d'un seul terme, puisque, autrement, $\varphi'(f)$ ne serait jamais nul, f ne l'étant pas; il faudrait donc, si la vitesse n'était pas proportionnelle à la force, supposer que, dans la nature, la fonction de la vitesse qui exprime la force est formée de plusieurs termes, ce qui est peu probable; il faudrait supposer, de plus, que la vitesse de la Terre est exactement

celle qui convient à l'équation $\varphi'(f) = 0$, ce qui est contre toute vraisemblance. D'ailleurs la vitesse de la Terre varie dans les diverses saisons de l'année : elle est d'un trentième environ plus grande en hiver qu'en été. Cette variation est plus considérable encore si, comme tout paraît l'indiquer, le Système solaire est en mouvement dans l'espace; car, selon que ce mouvement progressif conspire avec celui de la Terre, ou selon qu'il lui est contraire, il doit en résulter, pendant le cours de l'année, de grandes variations dans le mouvement absolu de la Terre, ce qui devrait altérer l'équation dont il s'agit et le rapport de la force imprimée à la vitesse absolue qui en résulte, si cette équation et ce rapport n'étaient pas indépendants du mouvement de la Terre : cependant l'observation n'y fait apercevoir aucune altération sensible.

Voilà donc deux lois du mouvement : savoir, la loi d'inertie et celle de la force proportionnelle à la vitesse, qui sont données par l'observation. Elles sont les plus naturelles et les plus simples que l'on puisse imaginer, et sans doute elles dérivent de la nature même de la matière; mais, cette nature étant inconnue, elles ne sont pour nous que des faits observés, les seuls, au reste, que la Mécanique emprunte de l'expérience.

6. La vitesse étant proportionnelle à la force, ces deux quantités peuvent être représentées l'une par l'autre, et tout ce que nous avons établi précédemment sur la composition des forces s'applique à la composition des vitesses. Il en résulte que les mouvements relatifs d'un système de corps animés de forces quelconques sont les mêmes, quel que soit leur mouvement commun; car ce dernier mouvement, décomposé en trois autres parallèles à trois axes fixes, ne fait qu'accroître d'une même quantité les vitesses partielles de chaque corps parallèlement à ces axes; et comme leur vitesse relative ne dépend que de la différence de ces vitesses partielles, elle est la même, quel que soit le mouvement commun à tous les corps : il est donc impossible alors de juger du mouvement absolu d'un système dont on fait partie, par les apparences que l'on y observe, et c'est ce qui caractérise la loi de la proportionnalité de la force à la vitesse.

Il résulte encore du n° 3 que, si l'on projette chaque force et leur résultante sur un plan fixe, la somme des moments des forces composantes ainsi projetées, par rapport à un point fixe pris sur le plan, est égale au moment de la projection de la résultante : or, si de ce point on mène au mobile un rayon que nous nommerons *rayon vecteur*, ce rayon, projeté sur le plan fixe, y tracerait, en vertu de chaque force agissant séparément, une aire égale au produit de la projection de la ligne qu'elle ferait décrire par la moitié de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur cette projection : cette aire est donc proportionnelle au temps. Elle est encore, dans un temps donné, proportionnelle au moment de la projection de la force; ainsi la somme des aires que tracerait la projection du rayon vecteur en vertu de chaque force composante, si elle agissait seule, est égale à l'aire que la résultante fait décrire à cette projection. Il suit de là que, si un mobile, projeté d'abord en ligne droite, est ensuite sollicité par des forces quelconques dirigées vers le point fixe, son rayon vecteur décrira toujours autour de ce point des aires proportionnelles aux temps, puisque les aires, que feraient décrire à ce rayon les nouvelles composantes, seraient nulles. Réciproquement, on voit que, si le mobile décrit autour du point fixe des aires proportionnelles aux temps, la résultante des nouvelles forces qui le sollicitent est constamment dirigée vers ce point.

7. Considérons maintenant le mouvement d'un point sollicité par des forces qui semblent agir d'une manière continue, telles que la pesanteur. Les causes de cette force et des forces semblables qui ont lieu dans la nature étant inconnues, il est impossible de savoir si elles agissent sans interruption, ou si leurs actions successives sont séparées par des intervalles de temps dont la durée est insensible; mais il est facile de s'assurer que les phénomènes doivent être à très-peu près les mêmes dans ces deux hypothèses; car, si l'on représente la vitesse d'un corps sollicité par une force sans cesse agissante, par l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse représente le temps, cette courbe, dans la seconde hypothèse, se changera dans un polygone d'un très-grand nombre de

côtés, et qui, par cette raison, pourra se confondre avec la courbe. Nous adopterons la première hypothèse avec les Géomètres, et nous supposerons que l'intervalle de temps, qui sépare deux actions consécutives d'une force quelconque, est égal à l'élément dt du temps que nous désignerons par t. Il est clair qu'il faut alors supposer l'action de la force d'autant plus considérable, que l'intervalle qui sépare ses actions successives est supposé plus grand, afin qu'après le même temps t la vitesse soit la même; l'action instantanée d'une force doit donc être supposée en raison de son intensité et de l'élément du temps pendant lequel elle est supposée agir. Ainsi, en représentant par P cette intensité, on doit supposer, au commencement de chaque instant dt, le mobile sollicité par une force $P\,dt$, et mû uniformément pendant cet instant. Cela posé :

On peut réduire toutes les forces qui sollicitent un point M à trois forces P, Q, R, agissant parallèlement à trois coordonnées rectangles x, y, z, qui déterminent la position de ce point; nous supposerons ces forces agir en sens contraire de l'origine de ces coordonnées, ou tendre à les accroître. Au commencement d'un nouvel instant dt, le mobile reçoit, dans le sens de chacune de ces coordonnées, les accroissements de force ou de vitesse $P\,dt$, $Q\,dt$, $R\,dt$. Les vitesses du point M, parallèles à ces coordonnées, sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; car, dans un instant infiniment petit, elles peuvent être censées uniformes, et par conséquent égales aux espaces élémentaires divisés par l'élément du temps. Les vitesses dont le mobile est animé au commencement d'un nouvel instant sont par conséquent

$$\frac{dx}{dt} + P\,dt, \quad \frac{dy}{dt} + Q\,dt, \quad \frac{dz}{dt} + R\,dt,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} + d\frac{dx}{dt} - d\frac{dx}{dt} + P\,dt,$$

$$\frac{dy}{dt} + d\frac{dy}{dt} - d\frac{dy}{dt} + Q\,dt,$$

$$\frac{dz}{dt} + d\frac{dz}{dt} - d\frac{dz}{dt} + R\,dt.$$

Mais, dans ce nouvel instant, les vitesses dont le mobile est animé parallèlement aux coordonnées x, y, z sont évidemment

$$\frac{dx}{dt} + d\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} + d\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} + d\frac{dz}{dt};$$

les forces

$$-d\frac{dx}{dt} + \mathrm{P}dt, \quad -d\frac{dy}{dt} + \mathrm{Q}dt, \quad -d\frac{dz}{dt} + \mathrm{R}dt$$

doivent donc être détruites, en sorte que le mobile M, en vertu de ces forces seules, serait en équilibre. Ainsi, en désignant par δx, δy, δz les variations quelconques des trois coordonnées x, y, z, variations qu'il ne faut pas confondre avec les différences dx, dy, dz qui expriment les espaces que le mobile décrit parallèlement aux coordonnées durant l'instant dt, l'équation (b) du n° 3 deviendra

$$(f) \qquad 0 = \delta x\left(d\frac{dx}{dt} - \mathrm{P}dt\right) + \delta y\left(d\frac{dy}{dt} - \mathrm{Q}dt\right) + \delta z\left(d\frac{dz}{dt} - \mathrm{R}dt\right).$$

Si le point M est libre, on égalera séparément à zéro les coefficients de δx, δy et δz, et l'on aura, en supposant constant l'élément dt du temps, les trois équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{P}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Q}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{R}.$$

Si le point M n'est pas libre, en sorte qu'il soit assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une ligne courbe, on éliminera de l'équation (f), au moyen des équations à la surface ou à la courbe, autant de variations δx, δy, δz qu'il y aura d'équations, et l'on égalera séparément à zéro les coefficients des variations restantes.

8. On peut supposer dans l'équation (f) les variations δx, δy, δz égales aux différentielles dx, dy, dz, puisque ces différentielles sont nécessairement assujetties aux conditions du mouvement du mobile M. En faisant cette supposition, et en intégrant ensuite l'équation (f), on aura

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2\int(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz),$$

c étant une constante arbitraire. $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ est le carré de la vitesse de M, vitesse que nous désignerons par v; en supposant donc que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ soit la différence exacte d'une fonction φ, on aura

$$(g) \qquad v^2 = c + 2\varphi.$$

Ce cas a lieu lorsque les forces qui sollicitent le point M sont fonctions des distances de leurs origines à ce point, ce qui comprend à peu près toutes les forces de la nature. En effet, S, S′,... représentant ces forces, et s, s',... étant les distances du point M à leurs origines, la résultante de toutes ces forces, multipliée par la variation de sa direction, sera, par le n° 2, égale à $\Sigma S\,\delta s$; elle est encore égale à $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z$; on a donc

$$P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = \Sigma S\,\delta s;$$

ainsi, le second membre de cette équation étant une différence exacte, le premier membre l'est pareillement.

Il résulte de l'équation (g) : 1° que, si le point M n'est sollicité par aucune force, sa vitesse est constante, puisque alors $\varphi = 0$; c'est ce dont il est facile de s'assurer d'ailleurs, en observant qu'un corps mû dans une surface ou sur une ligne courbe ne perd, à la rencontre de chaque plan infiniment petit de la surface ou de chaque côté infiniment petit de la courbe, qu'une partie infiniment petite du second ordre de sa vitesse; 2° que le point M, en partant d'un point donné avec une vitesse donnée pour arriver à un autre point, aura, en parvenant à ce dernier point, la même vitesse, quelle que soit la courbe qu'il aura décrite.

Mais, si le mobile n'est point assujetti à se mouvoir sur une courbe déterminée, la courbe qu'il décrit jouit d'une propriété singulière, à laquelle on a été conduit par des considérations métaphysiques, et qui n'est au fond qu'un résultat remarquable des équations différentielles précédentes. Elle consiste en ce que l'intégrale $\int v\,ds$, comprise entre les deux points extrêmes de la courbe décrite, y est moindre que sur toute autre courbe, si le corps est libre, ou sur toute autre courbe assu-

jettie à la même surface sur laquelle il doit se mouvoir, s'il n'est pas entièrement libre.

Pour le faire voir, nous observerons que, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ étant supposé une différentielle exacte, l'équation (g) donne

$$v\,\delta v = P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z;$$

l'équation (f) du numéro précédent devient ainsi

$$o = \delta x . d\frac{dx}{dt} + \delta y . d\frac{dy}{dt} + \delta z . d\frac{dz}{dt} - v\,dt . \delta v.$$

Nommons ds l'élément de la courbe décrite par le mobile; nous aurons

$$v\,dt = ds, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

partant

$$(h) \qquad o = \delta x . d\frac{dx}{dt} + \delta y . d\frac{dy}{dt} + \delta z . d\frac{dz}{dt} - ds . \delta v;$$

en différentiant par rapport à δ l'expression de ds, on a

$$\frac{ds}{dt}\,\delta\,ds = \frac{dx}{dt}\,\delta\,dx + \frac{dy}{dt}\,\delta\,dy + \frac{dz}{dt}\,\delta\,dz.$$

Les caractéristiques d et δ étant indépendantes, on peut les placer à volonté l'une avant l'autre; l'équation précédente peut ainsi prendre cette forme

$$v\,\delta\,ds = \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \delta x . d\frac{dx}{dt} - \delta y . d\frac{dy}{dt} - \delta z . d\frac{dz}{dt};$$

en retranchant du premier membre de cette équation le second membre de l'équation (h), on aura

$$\delta(v\,ds) = \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt}.$$

Cette dernière équation, intégrée par rapport à la caractéristique d, donne

$$\delta \int v\,ds = \text{const.} + \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}.$$

Si l'on étend l'intégrale à la courbe entière décrite par le mobile, et si l'on suppose les points extrêmes de cette courbe invariables, on aura $\delta\int v\,ds = 0$; c'est-à-dire que, de toutes les courbes suivant lesquelles le mobile assujetti aux forces P, Q, R peut parvenir d'un point donné à un autre point donné, il décrira celle dans laquelle la variation de l'intégrale $\int v\,ds$ est nulle, et dans laquelle, par conséquent, cette intégrale est un *minimum*.

Si le point se meut dans une surface courbe, sans être sollicité par aucune force, sa vitesse est alors constante, et l'intégrale $\int v\,ds$ devient $v\int ds$; ainsi la courbe décrite par le mobile est, dans ce cas, la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface, du point de départ au point d'arrivée.

9. Déterminons la pression qu'un point, mû dans une surface, exerce contre elle. Au lieu d'éliminer de l'équation (f) du n° 7 une des variations δx, δy, δz, au moyen de l'équation à la surface, on peut, par le n° 3, ajouter à cette équation l'équation différentielle de la surface, multipliée par une indéterminée $-\lambda\,dt$, et considérer ensuite les trois variations δx, δy, δz comme indépendantes. Soit donc $u = 0$ l'équation de la surface; on ajoutera à l'équation (f) le terme $-\lambda\,\delta u\,dt$, et la pression que le point exerce contre la surface sera, par le n° 3, égale à

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Supposons d'abord que le point ne soit sollicité par aucune force, sa vitesse v sera constante; si l'on observe ensuite que $v\,dt = ds$, l'élément dt du temps étant supposé constant, l'élément ds de la courbe décrite le sera pareillement, et l'équation (f), augmentée du terme $-\lambda\,\delta u\,dt$, donnera les trois suivantes

$$0 = v^2\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 = v^2\frac{d^2y}{ds^2} - \lambda\frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 = v^2\frac{d^2z}{ds^2} - \lambda\frac{\partial u}{\partial z},$$

d'où l'on tire

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{v^2\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{ds^2}.$$

Mais, ds étant constant, le rayon osculateur de la courbe décrite par le mobile est égal à

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}};$$

en nommant donc r ce rayon, on aura

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}=\frac{v^2}{r};$$

c'est-à-dire que la pression exercée par le point contre la surface est égale au carré de sa vitesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe qu'il décrit.

Si le point se meut dans une surface sphérique, il décrira la circonférence du grand cercle de la sphère qui passe par la direction primitive de son mouvement, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte plutôt à droite qu'à gauche du plan de ce cercle : sa pression contre la surface, ou, ce qui revient au même, contre la circonférence qu'il décrit, est donc égale au carré de sa vitesse, divisé par le rayon de cette circonférence.

Concevons le point attaché à l'extrémité d'un fil supposé sans masse, et dont l'autre extrémité soit fixe au centre de la surface; il est visible que la pression exercée par ce point contre la circonférence est égale à la tension qu'éprouverait le fil, si le point n'était retenu que par lui. L'effort, que ce point ferait pour tendre le fil et pour s'éloigner du centre de la circonférence, est ce que l'on nomme *force centrifuge;* ainsi la force centrifuge est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon.

Dans le mouvement d'un point sur une courbe quelconque, la force centrifuge est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe, puisque l'arc infiniment petit de cette courbe se confond avec la circonférence du cercle osculateur; on aura donc la pression que le point exerce contre la courbe qu'il décrit, en ajoutant au carré de sa vitesse, divisé par le rayon osculateur, la pression due aux forces qui sollicitent ce point.

Dans le mouvement d'un point sur une surface, la pression due à la

force centrifuge est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe décrite par ce point, et multiplié par le sinus de l'inclinaison du plan du cercle osculateur sur le plan tangent à la surface; en ajoutant à cette pression celle qui est due à l'action des forces qui sollicitent le point, on aura la pression totale qu'il exerce contre la surface.

Nous venons de voir que, si le point n'est animé d'aucune force, sa pression contre la surface est égale au carré de sa vitesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe décrite; le plan du cercle osculateur, c'est-à-dire le plan qui passe par deux côtés consécutifs de la courbe décrite par le point, est donc alors perpendiculaire à la surface. Cette courbe, relativement à la surface de la Terre, est celle que l'on a nommée *perpendiculaire à la méridienne*, et nous avons prouvé (**8**) qu'elle est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface.

10. De toutes les forces que nous observons sur la Terre, la plus remarquable est la pesanteur; elle pénètre les parties les plus intimes des corps, et sans la résistance de l'air elle les ferait tomber avec une égale vitesse. La pesanteur est à fort peu près la même sur les plus grandes hauteurs où nous puissions nous élever, et dans les plus grandes profondeurs où nous puissions descendre; sa direction est perpendiculaire à l'horizon, mais dans les mouvements des projectiles on peut supposer, sans erreur sensible, qu'elle est constante et qu'elle agit suivant des droites parallèles, vu le peu d'étendue des courbes qu'ils décrivent, relativement à la circonférence de la Terre. Ces corps étant mus dans un fluide résistant, nous nommerons $\mathrm{6}$ la résistance qu'ils en éprouvent, et qui est dirigée suivant le côté de la courbe qu'ils décrivent, côté que nous désignerons par ds; nous nommerons, de plus, g la pesanteur. Cela posé :

Reprenons l'équation (f) du n° **7**, et supposons que le plan des x et des y soit horizontal, et que l'origine des z soit au point le plus élevé; la force $\mathrm{6}$ produira, suivant les coordonnées x, y, z, les trois forces

$$-\mathrm{6}\frac{dx}{ds}, \quad -\mathrm{6}\frac{dy}{ds}, \quad -\mathrm{6}\frac{dz}{ds};$$

on aura donc, par le n° 7,

$$P = -6\frac{dx}{ds}, \quad Q = -6\frac{dy}{ds}, \quad R = -6\frac{dz}{ds} + g,$$

et l'équation (f) devient

$$o = \delta x\left(d\frac{dx}{dt} + 6\frac{dx}{ds}dt\right) + \delta y\left(d\frac{dy}{dt} + 6\frac{dy}{ds}dt\right) + \delta z\left(d\frac{dz}{dt} + 6\frac{dz}{ds}dt - g\,dt\right).$$

Si le corps est entièrement libre, on aura les trois équations

$$o = d\frac{dx}{dt} + 6\frac{dx}{ds}dt, \quad o = d\frac{dy}{dt} + 6\frac{dy}{ds}dt, \quad o = d\frac{dz}{dt} + 6\frac{dz}{ds}dt - g\,dt.$$

Les deux premières donnent

$$\frac{dy}{dt}\,d\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\,d\frac{dy}{dt} = o,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$dx = f\,dy,$$

f étant une constante arbitraire. Cette équation est celle d'une droite horizontale; ainsi le corps se meut dans un plan vertical. En prenant ce plan pour celui des x et des z, on aura $y = o$; les deux équations

$$o = d\frac{dx}{dt} + 6\frac{dx}{ds}dt, \quad o = d\frac{dz}{dt} + 6\frac{dz}{ds}dt - g\,dt$$

donneront, en faisant dx constant,

$$6 = \frac{ds\,d^2t}{dt^3}, \quad o = \frac{d^2z}{dt} - \frac{dz\,d^2t}{dt^2} + 6\frac{dz}{ds}dt - g\,dt,$$

d'où l'on tire $g\,dt^2 = d^2z$, et, en différentiant,

$$2g\,dt\,d^2t = d^3z;$$

en substituant pour d^2t sa valeur $\frac{6\,dt^3}{ds}$, et pour dt^2 sa valeur $\frac{d^2z}{g}$, on aura

$$\frac{6}{g} = \frac{ds\,d^3z}{2(d^2z)^2}.$$

Cette équation donne la loi de la résistance $\mathrm{6}$, nécessaire pour faire décrire au projectile une courbe déterminée.

Si la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, $\mathrm{6}$ est égal à $h\frac{ds^2}{dt^2}$, h étant constant dans le cas où la densité du milieu est uniforme. On a alors

$$\frac{\mathrm{6}}{g} = \frac{h\,ds^2}{g\,dt^2} = \frac{h\,ds^2}{d^2z};$$

partant $h\,ds = \frac{d^2z}{2d^2z}$; ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2ac^{2hs},$$

a étant une constante arbitraire, et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Si l'on suppose nulle la résistance du milieu, ou $h = 0$, on aura, en intégrant, l'équation à la parabole

$$z = ax^2 + bx + e,$$

b, e étant des constantes arbitraires.

L'équation différentielle $d^2z = g\,dt^2$ donnera $dt^2 = \frac{2a}{g}dx^2$, d'où l'on tire $t = x\sqrt{\frac{2a}{g}} + f'$. Supposons que x, z et t commencent ensemble; on aura $e = 0$, $f' = 0$, et par conséquent

$$t = x\sqrt{\frac{2a}{g}}, \quad z = ax^2 + bx,$$

ce qui donne

$$z = \frac{gt^2}{2} + bt\sqrt{\frac{g}{2a}}.$$

Ces trois équations renferment toute la théorie des projectiles dans le vide; il en résulte que la vitesse est uniforme dans le sens horizontal, et que dans le sens vertical elle est la même que si le corps tombait suivant la verticale.

Si le mobile part de l'état du repos, b sera nul, et l'on aura

$$\frac{dz}{dt} = gt, \quad z = \tfrac{1}{2}gt^2;$$

la vitesse acquise croît donc comme le temps, et l'espace croît comme le carré du temps.

Il est facile, au moyen de ces formules, de comparer la force centrifuge à la pesanteur. On a vu précédemment que, v étant la vitesse d'un corps mû dans une circonférence dont le rayon est r, la force centrifuge est $\frac{v^2}{r}$. Soit h la hauteur dont il devrait tomber pour acquérir la vitesse v; on aura, par ce qui précède, $v^2 = 2gh$; d'où l'on tire

$$\frac{v^2}{r} = g\frac{2h}{r}.$$

Si $h = \frac{1}{2}r$, la force centrifuge devient égale à la pesanteur g; ainsi un corps pesant attaché à l'extrémité d'un fil fixe par son autre extrémité, sur un plan horizontal, tendra ce fil avec la même force que s'il était suspendu verticalement, pourvu qu'il se meuve sur ce plan avec la vitesse qu'il acquerrait en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du fil.

11. Considérons le mouvement d'un corps pesant dans une surface sphérique. En nommant r son rayon, et fixant à son centre l'origine des coordonnées x, y, z, on aura $r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$; cette équation, comparée à celle-ci $u = 0$, donne $u = r^2 - x^2 - y^2 - z^2$; en ajoutant donc à l'équation (f) du n° 7 la fonction δu, multipliée par l'indéterminée $-\lambda dt$, on aura

$$0 = \delta x\left(d\frac{dx}{dt} + 2\lambda x\,dt\right) + \delta y\left(d\frac{dy}{dt} + 2\lambda y\,dt\right) + \delta z\left(d\frac{dz}{dt} + 2\lambda z\,dt - g\,dt\right),$$

équation dans laquelle on pourra égaler séparément à zéro les coefficients de chacune des variations δx, δy, δz, ce qui donne les trois équa-

tions suivantes

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases} 0 = d\dfrac{dx}{dt} + 2\lambda x\,dt, \\ 0 = d\dfrac{dy}{dt} + 2\lambda y\,dt, \\ 0 = d\dfrac{dz}{dt} + 2\lambda z\,dt - g\,dt. \end{cases}$$

L'indéterminée λ fait connaître la pression que le mobile exerce contre la surface. Cette pression est, par le n° 9, égale à

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

elle est par conséquent égale à $2\lambda r$; or on a, par le n° 8,

$$c + 2gz = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

c étant une constante arbitraire : en ajoutant cette équation aux équations (A) divisées par dt, et multipliées respectivement par x, y, z; en observant ensuite que, l'équation différentielle de la surface étant $0 = x\,dx + y\,dy + z\,dz$, on a

$$0 = x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

on trouvera

$$2\lambda r = \frac{c + 3gz}{r}.$$

Si l'on multiplie la première des équations (A) par $-y$, et qu'on l'ajoute à la seconde multipliée par x, on aura, en intégrant leur somme,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c',$$

c' étant une nouvelle arbitraire.

Le mouvement du point est ainsi ramené aux trois équations diffé-

rentielles du premier ordre

$$x\,dx + y\,dy = -z\,dz,$$
$$x\,dy - y\,dx = c'dt,$$
$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz.$$

En élevant chaque membre des deux premières au carré et en les ajoutant, on aura

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = c'^2 dt^2 + z^2 dz^2;$$

si l'on substitue au lieu de $x^2 + y^2$ sa valeur $r^2 - z^2$, et au lieu de $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ sa valeur $c + 2gz - \frac{dz^2}{dt^2}$, on aura, en supposant que le corps s'éloigne de la verticale,

$$dt = \frac{-r\,dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2}}.$$

La fonction sous le radical peut être mise sous la forme

$$(a - z)(z - b)(2gz + f),$$

a, b, f étant déterminés par les équations

$$f = \frac{2g(r^2 + ab)}{a + b},$$
$$c = \frac{2g(r^2 - a^2 - ab - b^2)}{a + b},$$
$$c'^2 = \frac{2g(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{a + b}.$$

On peut ainsi substituer aux arbitraires c et c' les nouvelles arbitraires a et b, dont la première est la plus grande valeur de z, et dont la seconde est la plus petite valeur. En faisant ensuite

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{a - z}{a - b}},$$

l'équation différentielle précédente deviendra

$$dt = \frac{r\sqrt{2(a+b)}}{\sqrt{g[(a+b)^2+r^2-b^2]}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\theta}},$$

γ^2 étant égal à $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2+r^2-b^2}$.

L'angle θ donne la coordonnée z au moyen de l'équation

$$z = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta,$$

et la coordonnée z, divisée par r, exprime le cosinus de l'angle que le rayon r fait avec la verticale.

Soit ϖ l'angle que le plan vertical qui passe par le rayon r fait avec le plan vertical qui passe par l'axe des x; on aura

$$x = \sqrt{r^2-z^2}\cos\varpi, \quad y = \sqrt{r^2-z^2}\sin\varpi,$$

ce qui donne

$$x\,dy - y\,dx = (r^2-z^2)\,d\varpi;$$

l'équation $x\,dy - y\,dx = c'dt$ donnera ainsi

$$d\varpi = \frac{c'dt}{r^2-z^2}.$$

En substituant pour z et dt leurs valeurs précédentes en θ, on aura l'angle ϖ en fonction de θ; ainsi l'on connaîtra, pour un temps quelconque, les deux angles θ et ϖ, ce qui suffit pour déterminer la position du mobile.

Nommons *demi-oscillation* du mobile le temps qu'il emploie à parvenir de la plus grande à la plus petite valeur de z; soit $\frac{1}{2}$T ce temps. Pour le déterminer, il faut intégrer la valeur précédente de dt depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on trouvera ainsi

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\sqrt{\frac{2r(a+b)}{(a+b)^2+r^2-b^2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\gamma^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\gamma^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\gamma^6+\dots\right].$$

Concevons le point suspendu à l'extrémité d'un fil sans masse, et fixe

par son autre extrémité; si la longueur du fil est r, le mobile sera mû exactement comme dans l'intérieur d'une surface sphérique; il formera avec le fil un pendule dont le cosinus du plus grand écart de la verticale sera $\frac{b}{r}$. Si l'on suppose que dans cet état la vitesse du mobile soit nulle, il oscillera dans un plan vertical, et l'on aura dans ce cas

$$a = r, \quad \gamma^2 = \frac{r - b}{2r}.$$

La fraction $\frac{r-b}{2r}$ est le carré du sinus de la moitié du plus grand angle que le fil forme avec la verticale; la durée entière T de l'oscillation du pendule sera donc

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{r-b}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{r-b}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{r-b}{2r}\right)^3 + \ldots\right].$$

Si l'oscillation est très-petite, $\frac{r-b}{2r}$ est une très-petite fraction que l'on peut négliger, et alors on a

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}};$$

les oscillations fort petites sont donc isochrones, ou de même durée, quelle que soit leur étendue; et l'on peut facilement, au moyen de cette durée et de la longueur correspondante du pendule, déterminer les variations de l'intensité de la pesanteur dans les divers lieux de la Terre.

Soit z la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps pendant le temps T; on aura, par le n° 10, $2z = gT^2$, et par conséquent $z = \frac{1}{2}\pi^2 r$; on aura donc ainsi, avec une grande précision, au moyen de la longueur du pendule à secondes, l'espace que la pesanteur fait parcourir aux corps dans la première seconde de leur chute. Des expériences très-exactes ayant fait voir que la longueur du pendule à secondes est la même, quelles que soient les substances que l'on fait osciller, il en résulte que la pesanteur agit également sur tous les corps, et qu'elle tend, dans le même lieu, à leur imprimer dans le même temps la même vitesse.

12. L'isochronisme des oscillations du pendule n'étant qu'approché, il est intéressant de connaître la courbe sur laquelle un corps pesant doit se mouvoir, pour arriver dans le même temps au point où son mouvement cesse, quel que soit l'arc qu'il aura décrit depuis le point le plus bas. Mais, pour embrasser ce problème dans toute sa généralité, nous supposerons, conformément à ce qui a lieu dans la nature, que le mobile se meut dans un milieu résistant. Soient s l'arc décrit depuis le point le plus bas de la courbe, z l'abscisse verticale comptée de ce point, dt l'élément du temps et g la pesanteur. La force retardatrice le long de l'arc de la courbe sera : 1° la pesanteur décomposée suivant l'arc ds, et qui devient ainsi égale à $g\frac{dz}{ds}$; 2° la résistance du milieu, que nous exprimerons par $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$, $\frac{ds}{dt}$ étant la vitesse du mobile, et $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ étant une fonction quelconque de cette vitesse. La différentielle de cette vitesse sera, par le n° 7, égale à $-g\frac{dz}{ds}-\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$; on aura donc, en faisant dt constant,

$$(i) \qquad 0=\frac{d^2s}{dt^2}+g\frac{dz}{ds}+\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right).$$

Supposons $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)=m\frac{ds}{dt}+n\frac{ds^2}{dt^2}$, et $s=\psi(s')$; en désignant par $\psi'(s')$ la différence de $\psi(s')$ divisée par ds', et par $\psi''(s')$ celle de $\psi'(s')$ divisée par ds', on aura

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds'}{dt}\,\psi'(s'),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2s'}{dt^2}\,\psi'(s')+\frac{ds'^2}{dt^2}\,\psi''(s'),$$

et l'équation (i) deviendra

$$(l) \qquad 0=\frac{d^2s'}{dt^2}+m\frac{ds'}{dt}+\frac{ds'^2}{dt^2}\cdot\frac{\psi''(s')+n[\psi'(s')]^2}{\psi'(s')}+\frac{g\,dz}{ds'[\psi'(s')]^2}.$$

On fera disparaître le terme multiplié par $\frac{ds'^2}{dt^2}$ au moyen de l'équation

$$o = \psi''(s') + n[\psi'(s')]^2,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\psi(s') = \log\left[h(s'+q)^{\frac{1}{n}}\right] = s,$$

h et q étant des arbitraires. Si l'on fait commencer s' avec s, on aura $hq^{\frac{1}{n}} = 1$, et si l'on fait, pour plus de simplicité, $h = 1$, on aura

$$s' = c^{ns} - 1,$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; l'équation différentielle (l) devient alors

$$o = \frac{d^2s'}{dt^2} + m\frac{ds'}{dt} + n^2 g \frac{dz}{ds'}(1+s')^2.$$

En supposant s' très-petit, nous pourrons développer le dernier terme de cette équation dans une suite ascendante par rapport aux puissances de s', et qui sera de cette forme $ks' + ls'^i + \ldots$, i étant plus grand que l'unité; ce qui donne

$$o = \frac{d^2s'}{dt^2} + m\frac{ds'}{dt} + ks' + ls'^i + \ldots.$$

Cette équation, multipliée par $c^{\frac{mt}{2}}(\cos\gamma t + \sqrt{-1}\sin\gamma t)$, et ensuite intégrée, devient, γ étant supposé égal à $\sqrt{k - \frac{m^2}{4}}$,

$$c^{\frac{mt}{2}}(\cos\gamma t + \sqrt{-1}\sin\gamma t)\left[\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{m}{2} - \gamma\sqrt{-1}\right)s'\right]^1_1$$
$$= -l\int s'^i dt . c^{\frac{mt}{2}}(\cos\gamma t + \sqrt{-1}\sin\gamma t) - \ldots.$$

En comparant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

on aura deux équations au moyen desquelles on pourra éliminer $\frac{ds'}{dt}$; mais il nous suffira ici de considérer la suivante

$$c^{\frac{mt}{2}}\frac{ds'}{dt}\sin\gamma t - c^{\frac{mt}{2}}s'\left(\frac{m}{2}\sin\gamma t - \gamma\cos\gamma t\right) = -l\int s'^{i}dt.c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t - \ldots,$$

les intégrales du second membre étant supposées commencer avec t. Nommons T la valeur de t à la fin du mouvement, où $\frac{ds}{dt}$ est nul; on aura, à cet instant,

$$c^{\frac{mT}{2}}s'\left(\frac{m}{2}\sin\gamma T - \gamma\cos\gamma T\right) = -l\int s'^{i}dt.c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t - \ldots.$$

Dans le cas de s' infiniment petit, le second membre de cette équation se réduit à zéro par rapport au premier, et l'on a

$$o = \frac{m}{2}\sin\gamma T - \gamma\cos\gamma T,$$

d'où l'on tire

$$\tan g\gamma T = \frac{2\gamma}{m};$$

et, comme le temps T est, par la supposition, indépendant de l'arc parcouru, cette valeur de tangγT a lieu pour un arc quelconque, ce qui donne, quel que soit s',

$$o = l\int s'^{i}dt.c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t - \ldots,$$

l'intégrale étant prise depuis $t = o$ jusqu'à $t = T$. En supposant s' très-petit, cette équation se réduit à son premier terme, et elle ne peut être satisfaite qu'en faisant $l = o$; car, le facteur $c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t$ étant constamment positif depuis $t = o$ jusqu'à $t = T$, l'intégrale précédente est nécessairement positive dans cet intervalle. Il ne peut donc y avoir de tautochronisme que dans la supposition de

$$n^2 g\frac{dz}{ds'}(1 - s')^2 = ks',$$

ce qui donne pour l'équation de la courbe tautochrone

$$g\,dz = \frac{k\,ds}{n}(1 - c^{-ns}).$$

Dans le vide, et lorsque la résistance est proportionnelle à la simple vitesse, n est nul, et cette équation devient

$$g\,dz = ks\,ds,$$

équation à la cycloïde.

Il est remarquable que le coefficient n de la partie de la résistance, proportionnelle au carré de la vitesse, n'entre point dans l'expression du temps T, et il est visible, par l'analyse précédente, que cette expression serait la même, si l'on ajoutait à la loi précédente de la résistance les termes $p\frac{ds^3}{dt^3} + q\frac{ds^4}{dt^4} + \ldots .$

Soit, en général, R la force retardatrice le long de la courbe; on aura

$$0 = \frac{d^2s}{dt^2} + \text{R};$$

s est une fonction du temps t et de l'arc total parcouru, qui par conséquent est fonction de t et de s. En différentiant cette dernière fonction, on aura une équation différentielle de cette forme

$$\frac{ds}{dt} = \text{V},$$

V étant une fonction de t et de s, qui doit être nulle, par la condition du problème, lorsque t a une valeur déterminée et indépendante de l'arc total parcouru. Supposons, par exemple, $\text{V} = \text{ST}$, S étant fonction de s seul, et t étant fonction de T seul; on aura

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{T}\frac{d\text{S}}{ds}\frac{ds}{dt} + \text{S}\frac{d\text{T}}{dt} = \frac{d\text{S}}{\text{S}\,ds}\frac{ds^2}{dt^2} + \text{S}\frac{d\text{T}}{dt};$$

mais l'équation $\frac{ds}{dt} = \text{ST}$ donne t, et par conséquent $\frac{d\text{T}}{dt}$ égal à une fonc-

tion de $\frac{ds}{S\,dt}$, fonction que nous désignerons par $\frac{ds^2}{S^2 dt^2}\psi\left(\frac{ds}{S\,dt}\right)$; on aura donc

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ds^2}{S\,dt^2}\left[\frac{dS}{ds} + \psi\left(\frac{ds}{S\,dt}\right)\right] = -R.$$

Telle est l'expression de la résistance qui convient à l'équation différentielle $\frac{ds}{dt} = ST$; et il est facile de voir qu'elle embrasse le cas de la résistance proportionnelle aux deux premières puissances de la vitesse, multipliées respectivement par des coefficients constants. D'autres équations différentielles donneraient d'autres lois de résistance.

CHAPITRE III.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE CORPS.

13. Le cas le plus simple de l'équilibre de plusieurs corps est celui de deux points matériels qui se choquent avec des vitesses égales et directement contraires; leur impénétrabilité mutuelle anéantit évidemment leur vitesse, et les réduit à l'état du repos.

Concevons présentement un nombre m de points matériels contigus, disposés en ligne droite, et animés de la vitesse u dans la direction de cette droite. Concevons pareillement un nombre m' de points contigus, disposés sur la même droite, et animés de la vitesse u' directement contraire à u, en sorte que les deux systèmes viennent à se choquer. Il doit exister, pour leur équilibre à l'instant du choc, un rapport entre u et u', qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous observerons que le système m, animé de la vitesse u, ferait équilibre à un seul point matériel animé de la vitesse mu dirigée en sens contraire; car chaque point du système détruirait dans ce dernier point une vitesse égale à u, et par conséquent ses m points détruiraient la vitesse entière mu; on peut donc substituer à ce système un seul point animé de la vitesse mu. On peut semblablement substituer au système m' un seul point animé de la vitesse $m'u'$; or, les deux systèmes étant supposés se faire équilibre, les deux points qui en tiennent lieu doivent pareillement se faire équilibre, ce qui exige que leurs vitesses soient égales; on a donc pour la condition de l'équilibre des deux systèmes $mu = m'u'$.

La masse d'un corps est le nombre de ses points matériels, et l'on nomme *quantité de mouvement* le produit de la masse par la vitesse; c'est aussi ce que l'on entend par la force d'un corps en mouvement. Pour l'équilibre de deux corps ou de deux systèmes de points qui viennent à se choquer en sens contraire, les quantités de mouvement ou les forces opposées doivent être égales, et par conséquent les vitesses doivent être réciproques aux masses.

La densité des corps dépend du nombre des points matériels qu'ils renferment sous un volume donné. Pour avoir leur densité absolue, il faudrait pouvoir comparer leurs masses à celle d'une substance qui n'aurait point de pores; mais on n'en connaît point de semblables; on ne peut donc avoir que la densité relative des corps, c'est-à-dire, le rapport de leur densité à celle d'une substance donnée. Il est visible que la masse est en raison du volume et de la densité; en nommant donc M la masse d'un corps, U son volume et D sa densité, on a généralement $M = DU$, équation dans laquelle on doit observer que les quantités M, D et U expriment des rapports à des unités de leur espèce.

Ce que nous venons de dire suppose que les corps sont composés de points matériels semblables, et qu'ils ne diffèrent que par la position respective de ces points. Mais, la nature des corps étant inconnue, cette hypothèse est au moins précaire, et il est possible qu'il y ait des différences essentielles entre leurs molécules intégrantes. Heureusement la vérité de cette hypothèse est indifférente à la Mécanique, et l'on peut, sans craindre aucune erreur, en faire usage, pourvu que par *points matériels semblables* on entende des points qui, se choquant avec des vitesses égales et contraires, se font mutuellement équilibre, quelle que soit leur nature.

14. Deux points matériels, dont les masses sont m et m', ne peuvent agir l'un sur l'autre que suivant la droite qui les joint. A la vérité, si les deux points sont liés par un fil qui passe sur une poulie fixe, leur action réciproque peut n'être point dirigée suivant cette droite. Mais on peut considérer la poulie fixe comme ayant à son centre une masse

d'une densité infinie, qui réagit sur les deux corps m et m', dont l'action l'un sur l'autre n'est plus qu'indirecte.

Nommons p l'action que m exerce sur m' au moyen d'une droite inflexible et sans masse, qui est supposée unir ces deux points. En concevant cette droite animée de deux forces égales et contraires p et $-p$, la force $-p$ détruira dans le corps m une force égale à p, et la force p de la droite se communiquera tout entière au corps m'. Cette perte de force dans m, occasionnée par son action sur m', est ce que l'on nomme *réaction* de m'; ainsi, dans la communication des mouvements, *la réaction est toujours égale et contraire à l'action*. L'observation fait voir que ce principe a lieu dans toutes les actions de la nature.

Imaginons deux corps pesants m et m' attachés aux extrémités d'une droite horizontale, inflexible et sans masse, qui puisse tourner librement autour d'un de ses points. Pour concevoir l'action de ces corps l'un sur l'autre lorsqu'ils se font équilibre, il faut supposer la droite infiniment peu rompue à son point fixe, et formée de deux droites faisant à ce point un angle qui ne diffère de deux angles droits que d'une quantité infiniment petite ω. Soient f et f' les distances de m et m' au point fixe; en décomposant la pesanteur de m en deux forces, l'une agissant sur le point fixe, l'autre dirigée vers m', cette dernière force sera $\frac{mg(f+f')}{\omega f'}$, g étant la pesanteur. L'action de m' sur m sera pareillement $\frac{m'g(f+f')}{\omega f}$; en égalant donc ces deux forces, en vertu de l'équilibre, on aura $mf = m'f'$; ce qui donne la loi connue de l'équilibre du levier, et fait en même temps concevoir l'action réciproque des forces parallèles.

Considérons présentement l'équilibre d'un système de points m, m', m'',... sollicités par des forces quelconques, et réagissant les uns sur les autres. Soient f la distance de m à m', f' la distance de m à m'', f'' la distance de m' à m'',...; soient encore p l'action réciproque de m sur m', p' celle de m sur m'', p'' celle de m' sur m'',...; enfin, soient mS, $m'S'$, $m''S''$,... les forces qui sollicitent m, m', m'',..., et s, s', s'',... les droites prises depuis leurs origines jusqu'aux corps m, m', m'',....

6.

Cela posé, le point m peut être considéré comme étant parfaitement libre, et en équilibre en vertu de la force $m\mathrm{S}$ et des forces que lui communiquent les corps m', m'',...; mais, s'il était assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe, il faudrait ajouter à ces forces la réaction de la surface ou de la courbe. Soit donc δs la variation de s, et désignons par $\delta_{,} f$ la variation de f, prise en regardant m' comme fixe. Désignons pareillement par $\delta_{,} f'$ la variation de f', prise en regardant m'' comme fixe, etc. Soient R, R′ les réactions de deux surfaces qui, par leur intersection, forment la courbe sur laquelle le point m est assujetti à se mouvoir, et δr, $\delta r'$ les variations des directions de ces dernières forces. L'équation (d) du n° 3 donnera

$$0 = m\mathrm{S}\,\delta s + p\,\delta_{,} f + p'\,\delta_{,} f' + \ldots + \mathrm{R}\,\delta r + \mathrm{R}'\,\delta r'.$$

Pareillement m' peut être considéré comme un point parfaitement libre, en équilibre en vertu de la force $m'\mathrm{S}'$, des actions des corps m, m'',..., et des réactions des surfaces sur lesquelles il peut être assujetti à se mouvoir, réactions que nous désignerons par R″ et R‴. Soient donc $\delta s'$ la variation de s', $\delta_{,,} f$ la variation de f prise en regardant m comme fixe, $\delta_{,} f''$ la variation de f'' prise en regardant m'' comme fixe, etc. Soient de plus $\delta r''$, $\delta r'''$ les variations des directions de R″, R‴; l'équilibre de m' donnera

$$0 = m'\mathrm{S}'\,\delta s' + p\,\delta_{,,} f + p''\,\delta_{,} f'' + \ldots + \mathrm{R}''\,\delta r'' + \mathrm{R}'''\,\delta r'''.$$

On formera de semblables équations relatives à l'équilibre de m'', m''',...; en les ajoutant ensuite, et observant que

$$\delta f = \delta_{,} f + \delta_{,,} f, \quad \delta f' = \delta_{,} f' + \delta_{,,} f', \ldots,$$

δf, $\delta f'$,... étant les variations totales de f, f',..., on aura

$$(k) \qquad 0 = \Sigma\, m\mathrm{S}\,\delta s + \Sigma\, p\,\delta f + \Sigma\, \mathrm{R}\,\delta r,$$

équation dans laquelle les variations des coordonnées des différents corps du système sont entièrement arbitraires. On doit observer ici qu'au lieu de $m\mathrm{S}\,\delta s$, on peut, en vertu de l'équation (a) du n° 2, sub-

stituer la somme des produits de toutes les forces partielles dont m est animé par les variations de leurs directions respectives. Il en est de même des produits $m'S'\delta s'$, $m''S''\delta s''$, ...

Si les corps m, m', m'', ... sont liés entre eux d'une manière invariable, les distances f, f', f'', ... sont constantes, et l'on a pour la condition de la liaison des parties du système

$$\delta f = 0, \quad \delta f' = 0, \quad \delta f'' = 0, \ldots.$$

Les variations des coordonnées étant arbitraires dans l'équation (k), on peut les assujettir à satisfaire à ces dernières équations, et alors les forces p, p', p'', ..., qui dépendent de l'action réciproque des corps du système, disparaissent de cette équation; on peut même en faire disparaître les termes $R\delta r$, $R'\delta r'$, ..., en assujettissant les variations des coordonnées à satisfaire aux équations des surfaces sur lesquelles les corps sont forcés de se mouvoir; l'équation (k) devient ainsi

$$(l) \qquad 0 = \Sigma m S \delta s;$$

d'où il suit que, dans le cas de l'équilibre, la somme des variations des produits des forces par les éléments de leurs directions est nulle, de quelque manière que l'on fasse varier la position du système, pourvu que les conditions de la liaison de ses parties soient observées.

Ce théorème, auquel nous sommes parvenus dans la supposition particulière d'un système de corps liés entre eux d'une manière invariable, est général, quelles que soient les conditions de la liaison des parties du système. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'en assujettissant les variations des coordonnées à ces conditions, on a dans l'équation (k)

$$0 = \Sigma p \delta f + \Sigma R \delta r;$$

or il est clair que δr, $\delta r'$, ... sont nuls en vertu de ces conditions; il ne s'agit donc que de prouver que l'on a $0 = \Sigma p \delta f$, en assujettissant aux mêmes conditions les variations des coordonnées.

Concevons le système animé des seules forces p, p', p'', ..., et sup-

posons que les corps soient forcés de se mouvoir sur des courbes qu'ils puissent décrire en vertu des mêmes conditions. Alors ces forces se décomposeront en d'autres, les unes q, q', q'', ..., dirigées suivant les droites f, f', f'', ..., et qui se détruiront mutuellement sans produire d'action sur les courbes décrites; les autres T, T', T'', ..., perpendiculaires aux courbes décrites; les autres, enfin, tangentielles à ces courbes, et en vertu desquelles le système sera mû. Mais il est aisé de voir que ces dernières forces doivent être nulles; car, le système étant supposé leur obéir librement, elles ne peuvent produire ni pression sur les courbes décrites, ni réaction des corps les uns sur les autres; elles ne peuvent donc pas faire équilibre aux forces $-p$, $-p'$, $-p''$, ...; q, q', q'', ...; T, T', ...; il faut donc qu'elles soient nulles, et que le système soit en équilibre en vertu des seules forces $-p$, $-p'$, $-p''$, ...; q, q', q'', ...; T, T', ... Soient δi, $\delta i'$, ... les variations des directions des forces T, T', ...; on aura, en vertu de l'équation (k),

$$0 = \Sigma(q-p)\,\delta f + \Sigma\,\mathrm{T}\,\delta i;$$

mais le système étant supposé en équilibre en vertu des seules forces q, q', ..., sans qu'il en résulte aucune action sur les courbes décrites, l'équation (k) donne encore $0 = \Sigma q\,\delta f$; partant

$$0 = \Sigma p\,\delta f - \Sigma\,\mathrm{T}\,\delta i.$$

Si l'on assujettit les variations des coordonnées à satisfaire aux courbes décrites, on a $\delta i = 0$, $\delta i' = 0$, ...; on a donc alors

$$0 = \Sigma p\,\delta f;$$

et, comme les courbes décrites sont elles-mêmes arbitraires et ne sont assujetties qu'aux conditions de la liaison des parties du système, l'équation précédente a lieu, pourvu que ces conditions soient remplies, et alors l'équation (k) se change dans l'équation (l). Cette équation est la traduction analytique du principe suivant, connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles*.

Si l'on fait varier infiniment peu la position d'un système de corps, en l'assujettissant aux conditions qu'il doit remplir, la somme des forces qui le sollicitent, multipliées chacune par l'espace que le corps auquel elle est appliquée parcourt suivant sa direction, doit être égale à zéro dans le cas de l'équilibre du système.

Non-seulement ce principe a lieu dans le cas de l'équilibre, mais il en assure l'existence. Supposons, en effet, que, l'équation (l) ayant lieu, les points m, m',... prennent les vitesses v, v', ... en vertu des forces mS, $m'S'$, ... qui leur sont appliquées. Ce système serait en équilibre en vertu de ces forces et de celles-ci $-mv$, $-m'v'$, ...; désignons par δv, $\delta v'$,... les variations des directions de ces nouvelles forces; on aura, par le principe des vitesses virtuelles,

$$o = \Sigma mS\,\delta s - \Sigma mv\,\delta v;$$

mais on a, par la supposition, $o = \Sigma mS\,\delta s$; on a donc $o = \Sigma mv\,\delta v$. Les variations δv, $\delta v'$, ... devant être assujetties aux conditions du système, on peut les supposer égales à $v\,dt$, $v'dt$, ..., et alors on a

$$o = \Sigma mv^2,$$

équation qui donne $v = o$, $v' = o$, ...; c'est-à-dire que le système est en équilibre en vertu des seules forces mS, $m'S'$, ...

Les conditions de la liaison des parties d'un système peuvent toujours se réduire à des équations entre les coordonnées de ses différents corps. Soient $u = o$, $u' = o$, $u'' = o$,... ces diverses équations; on pourra, par le n° 3, ajouter à l'équation (l) la fonction $\lambda\,\delta u + \lambda'\,\delta u' + \ldots$, ou $\Sigma\lambda\delta u$, λ, λ', ... étant des fonctions indéterminées des coordonnées des corps; cette équation deviendra ainsi

$$o = \Sigma\, mS\,\delta s + \Sigma\lambda\,\delta u;$$

dans ce cas, les variations de toutes les coordonnées seront arbitraires, et l'on pourra égaler leurs coefficients à zéro, ce qui donnera autant d'équations au moyen desquelles on déterminera les fonctions λ, λ',....

Si l'on compare ensuite cette équation à l'équation (k), on aura

$$\Sigma\lambda\,\delta u = \Sigma p\,\delta f + \Sigma \mathrm{R}\,\delta r,$$

d'où il sera facile de conclure les actions réciproques des corps m, m',... et les pressions $-\mathrm{R}$, $-\mathrm{R}'$,... qu'ils exercent contre les surfaces auxquelles ils sont assujettis.

15. Si tous les corps du système sont fixement attachés ensemble, sa position sera déterminée par celle de trois de ses points qui ne sont pas en ligne droite; la position de chacun de ces points dépend de trois coordonnées, ce qui produit neuf indéterminées; mais, les distances mutuelles des trois points étant données et invariables, on peut, à leur moyen, réduire ces indéterminées à six autres qui, substituées dans l'équation (l), introduiront six variations arbitraires; en égalant à zéro leurs coefficients, on aura six équations qui renfermeront toutes les conditions de l'équilibre du système. Développons ces équations.

Pour cela, soient x, y, z les coordonnées de m; x', y', z' celles de m'; x'', y'', z'' celles de m'', etc.; on aura

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\\ f' &= \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2},\\ f'' &= \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on suppose

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x' = \delta x'' = \ldots,\\ \delta y &= \delta y' = \delta y'' = \ldots,\\ \delta z &= \delta z' = \delta z'' = \ldots, \end{aligned}$$

on aura $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0, \ldots$; les conditions à satisfaire seront donc remplies, et l'on aura en vertu de l'équation (l)

$$(m) \qquad 0 = \Sigma\, m\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial x}, \quad 0 = \Sigma\, m\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial y}, \quad 0 = \Sigma\, m\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial z};$$

on aura ainsi trois des six équations qui renferment les conditions de l'équilibre du système. Les seconds membres de ces équations sont les sommes des forces du système, décomposées parallèlement aux trois axes des x, des y et des z ; chacune de ces sommes doit donc être nulle dans le cas de l'équilibre.

Les équations $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0, \ldots$ seront encore satisfaites si l'on suppose z, z', $z'', \ldots$ invariables, et si l'on fait

$$\begin{aligned} \delta x &= y\,\delta\varpi, & \delta y &= -x\,\delta\varpi, \\ \delta x' &= y'\,\delta\varpi, & \delta y' &= -x'\,\delta\varpi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$\delta\varpi$ étant une variation quelconque. En substituant ces valeurs dans l'équation (l), on aura

$$0 = \Sigma m \mathrm{S}\left(y\frac{\partial s}{\partial x} - x\frac{\partial s}{\partial y}\right).$$

Il est visible que l'on peut changer, dans cette équation, soit les coordonnées x, x', $x'', \ldots$, soit les coordonnées y, y', $y'', \ldots$, en z, z', $z'', \ldots$, ce qui donnera deux autres équations qui, réunies à la précédente, formeront le système suivant d'équations

$$(n)\qquad \begin{cases} 0 = \Sigma m \mathrm{S}\left(y\dfrac{\partial s}{\partial x} - x\dfrac{\partial s}{\partial y}\right), \\ 0 = \Sigma m \mathrm{S}\left(z\dfrac{\partial s}{\partial x} - x\dfrac{\partial s}{\partial z}\right), \\ 0 = \Sigma m \mathrm{S}\left(y\dfrac{\partial s}{\partial z} - z\dfrac{\partial s}{\partial y}\right); \end{cases}$$

la fonction $\Sigma m \mathrm{S} y \dfrac{\partial s}{\partial x}$ est, par le n° 3, la somme des moments de toutes les forces parallèles à l'axe des x, pour faire tourner le système autour de l'axe des z. Pareillement, la fonction $\Sigma m \mathrm{S} x \dfrac{\partial s}{\partial y}$ est la somme des moments de toutes les forces parallèles à l'axe des y, pour faire tourner le système autour de l'axe des z, mais en sens contraire des premières forces; la première des équations (n) indique, par conséquent, que la

somme des moments des forces est nulle par rapport à l'axe des z. La seconde et la troisième de ces équations indiquent semblablement que la somme des moments des forces est nulle, soit par rapport à l'axe des y, soit par rapport à l'axe des x. En réunissant ces trois conditions à celle-ci, savoir, que les sommes des forces parallèles à ces axes soient nulles par rapport à chacun d'eux, on aura les six conditions de l'équilibre d'un système de corps invariablement unis ensemble.

Si l'origine des coordonnées est fixe et attachée invariablement au système, elle détruira les forces parallèles aux trois axes, et les conditions de l'équilibre du système autour de cette origine se réduiront à ce que les sommes des moments des forces pour le faire tourner autour des trois axes soient nulles relativement à chacun d'eux.

Supposons que les corps m, m', m'',... ne soient animés que par la pesanteur. Son action étant la même sur tous ces corps, et les directions de la pesanteur pouvant être supposées les mêmes dans toute l'étendue du système, on aura

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}' = \mathrm{S}'' = \ldots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s'}{\partial x'} = \frac{\partial s''}{\partial x''} = \ldots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s'}{\partial y'} = \frac{\partial s''}{\partial y''} = \ldots,$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial s'}{\partial z'} = \frac{\partial s''}{\partial z''} = \ldots.$$

Les trois équations (n) seront satisfaites, quelle que soit la direction de s ou de la pesanteur, au moyen des trois suivantes

$$(o) \qquad 0 = \Sigma mx, \quad 0 = \Sigma my, \quad 0 = \Sigma mz.$$

L'origine des coordonnées étant supposée fixe, elle détruira parallèlement à chacun des trois axes les forces $\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial x}\Sigma m$, $\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial y}\Sigma m$, $\mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial z}\Sigma m$; en composant ces trois forces, on aura une force unique égale à $\mathrm{S}\Sigma m$, c'est-à-dire, égale au poids du système.

Cette origine des coordonnées, autour de laquelle nous supposons ici

le système en équilibre, est un point du système très-remarquable, en ce qu'étant soutenu, le système animé par la pesanteur reste en équilibre, quelque situation qu'on lui donne autour de ce point, que l'on nomme *centre de gravité* du système. Sa position est déterminée par la condition que, si l'on fait passer par ce point un plan quelconque, la somme des produits de chaque corps par sa distance à ce plan est nulle; car cette distance est une fonction linéaire des coordonnées x, y, z du corps; en la multipliant donc par la masse du corps, la somme de ces produits sera nulle en vertu des équations (o).

Pour fixer la position du centre de gravité, soient X, Y, Z ses trois coordonnées par rapport à un point donné; soient x, y, z les coordonnées de m, rapportées au même point; x', y', z' celles de m', et ainsi de suite; les équations (o) donneront

$$o = \Sigma m(x - X);$$

mais on a $\Sigma m X = X \Sigma m$, Σm étant la masse entière du système; on a donc

$$X = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}.$$

On aura pareillement

$$Y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m};$$

ainsi, les coordonnées X, Y, Z ne déterminant qu'un seul point, on voit que le centre de gravité d'un système de corps est unique. Les trois équations précédentes donnent

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(\Sigma m x)^2 + (\Sigma m y)^2 + (\Sigma m z)^2}{(\Sigma m)^2},$$

équation que l'on peut mettre sous cette forme :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2)}{\Sigma m} - \frac{\Sigma m m'[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}{(\Sigma m)^2},$$

l'intégrale finie $\Sigma m m'[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]$ exprimant la somme de tous les produits semblables à celui qui est renfermé sous la

caractéristique Σ, et que l'on peut former en considérant deux à deux tous les corps du système. On aura donc ainsi la distance du centre de gravité à un point fixe quelconque, au moyen des distances des corps du système à ce même point fixe, et de leurs distances mutuelles. En déterminant de cette manière la distance du centre de gravité à trois points fixes quelconques, on aura sa position dans l'espace; ce qui donne un nouveau moyen de le déterminer.

On a étendu la dénomination de *centre de gravité* à un point d'un système quelconque de corps pesants ou non pesants, déterminé par les trois coordonnées X, Y, Z.

16. Il est facile d'appliquer les résultats précédents à l'équilibre d'un corps solide de figure quelconque, en le concevant formé d'une infinité de points liés fixement entre eux. Soit donc dm un de ces points, ou une molécule infiniment petite du corps; soient x, y, z les coordonnées rectangles de cette molécule; soient encore P, Q, R les forces dont elle est animée parallèlement aux axes des x, des y et des z; les équations (m) et (n) du numéro précédent se changeront dans les suivantes

$$o = \int P\,dm, \quad o = \int Q\,dm, \quad o = \int R\,dm,$$
$$o = \int (Py - Qx)\,dm, \quad o = \int (Pz - Rx)\,dm, \quad o = \int (Ry - Qz)\,dm,$$

le signe intégral $\int$ étant relatif à la molécule dm, et devant s'étendre à la masse entière du solide.

Si le corps ne peut que tourner autour de l'origine des coordonnées, les trois dernières équations suffisent pour l'équilibre.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

---

17. Pour avoir les lois de l'équilibre et du mouvement de chacune des molécules fluides, il faudrait connaître leur figure, ce qui est impossible; mais nous n'avons besoin de déterminer ces lois que pour les fluides considérés en masse, et alors la connaissance des figures de leurs molécules devient inutile. Quelles que soient ces figures et les dispositions qui en résultent dans les molécules intégrantes, tous les fluides pris en masse doivent offrir les mêmes phénomènes dans leur équilibre et dans leurs mouvements, en sorte que l'observation de ces phénomènes ne peut rien nous apprendre sur la configuration des molécules fluides. Ces phénomènes généraux sont fondés sur la mobilité parfaite de ces molécules, qui peuvent ainsi céder au plus léger effort. Cette mobilité est la propriété caractéristique des fluides; elle les distingue des corps solides et sert à les définir. Il en résulte que, pour l'équilibre d'une masse fluide, chaque molécule doit être en équilibre en vertu des forces qui la sollicitent et des pressions qu'elle éprouve de la part des molécules environnantes. Développons les équations qui résultent de cette propriété.

Pour cela, considérons un système de molécules fluides formant un parallélépipède rectangle infiniment petit. Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles de l'angle de ce parallélépipède le plus voisin de l'origine des coordonnées. Soient dx, dy, dz les trois dimensions de ce parallélépipède; nommons p la moyenne de toutes les pressions qu'é-

prouvent les différents points de la face $dy\,dz$ du parallélépipède la plus voisine de l'origine des coordonnées, et p' la même quantité relative à la face opposée. Le parallélépipède, en vertu de la pression qu'il éprouve, sera sollicité, parallèlement à l'axe des x, par une force égale à $(p - p')\,dy\,dz$; $p' - p$ est la différence de p prise en ne faisant varier que x; car, quoique la pression p' agisse en sens contraire de p, cependant, la pression qu'éprouve un point du fluide étant la même dans tous les sens, $p' - p$ peut être considéré comme la différence de deux forces infiniment voisines et agissant dans le même sens; on a donc

$$p' - p = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx, \quad \text{et} \quad (p - p')\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Soient P, Q, R les trois forces accélératrices qui animent d'ailleurs les molécules fluides parallèlement aux axes des x, des y et des z; si l'on nomme ρ la densité du parallélépipède, sa masse sera $\rho\,dx\,dy\,dz$, et le produit de la force P par cette masse sera la force entière qui en résulte pour la mouvoir; cette masse sera par conséquent sollicitée, parallèlement à l'axe des x, par la force

$$\left(\rho P - \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz.$$

Elle sera pareillement sollicitée, parallèlement aux axes des y et des z, par les forces

$$\left(\rho Q - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz \quad \text{et} \quad \left(\rho R - \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz;$$

on aura donc, en vertu de l'équation (b) du n° 3,

$$0 = \left(\rho P - \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x + \left(\rho Q - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta y + \left(\rho R - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta z,$$

ou

$$\delta p = \rho\,(P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z).$$

Le second membre de cette équation doit être, comme le premier, une

variation exacte; ce qui donne les équations suivantes aux différences partielles

$$\frac{\partial.\rho P}{\partial y}=\frac{\partial.\rho Q}{\partial x},\quad \frac{\partial.\rho P}{\partial z}=\frac{\partial.\rho R}{\partial x},\quad \frac{\partial.\rho Q}{\partial z}=\frac{\partial.\rho R}{\partial y},$$

d'où l'on tire

$$o=P\frac{\partial Q}{\partial z}-Q\frac{\partial P}{\partial z}+R\frac{\partial P}{\partial y}-P\frac{\partial R}{\partial y}+Q\frac{\partial R}{\partial x}-R\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Cette équation exprime la relation qui doit exister entre les forces P, Q, R, pour que l'équilibre soit possible.

Si le fluide est libre à sa surface ou dans quelques parties de cette surface, la valeur de p sera nulle dans ces parties; on aura donc $\delta p=o$, pourvu que l'on assujettisse les variations δx, δy, δz à appartenir à cette surface; ainsi, en remplissant ces conditions, on aura

$$o=P\,\delta x+Q\,\delta y+R\,\delta z.$$

Soit $\delta u=o$ l'équation différentielle de la surface; on aura

$$P\,\delta x+Q\,\delta y+R\,\delta z=\lambda\,\delta u,$$

λ étant une fonction de x, y, z; d'où il suit, par le n° 3, que la résultante des forces P, Q, R doit être perpendiculaire aux parties de la surface dans lesquelles le fluide est libre.

Supposons que la variation $P\,\delta x+Q\,\delta y+R\,\delta z$ soit exacte, ce qui a lieu, par le n° 2, lorsque les forces P, Q, R sont le résultat de forces attractives. Nommons alors $\delta\varphi$ cette variation : on aura $\delta p=\rho\,\delta\varphi$; ρ doit donc être fonction de p et de φ, et, comme en intégrant cette équation différentielle on a φ en fonction de p, on aura p en fonction de ρ. La pression p est donc la même pour toutes les molécules dont la densité est la même; ainsi δp est nul relativement aux surfaces des couches de la masse fluide, dans lesquelles la densité est constante, et l'on a, par rapport à ces surfaces,

$$o=P\,\delta x+Q\,\delta y+R\,\delta z.$$

Il suit de là que la résultante des forces qui animent chaque molécule

fluide est, dans l'état d'équilibre, perpendiculaire à la surface de ces couches, que l'on a nommées pour cela *couches de niveau*. Cette condition est toujours remplie si le fluide est homogène et incompressible, puisque alors les couches auxquelles cette résultante est perpendiculaire sont toutes de même densité.

Pour l'équilibre d'une masse fluide homogène dont la surface extérieure est libre, et qui recouvre un noyau solide fixe et de figure quelconque, il est donc nécessaire et il suffit : 1° que la différentielle $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z$ soit exacte; 2° que la résultante des forces à la surface extérieure soit dirigée vers cette surface et lui soit perpendiculaire.

CHAPITRE V.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS.

18. Nous avons ramené, dans le n° 7, les lois du mouvement d'un point à celles de l'équilibre, en décomposant son mouvement instantané en deux autres, dont l'un subsiste, et dont l'autre est détruit par les forces qui sollicitent ce point; l'équilibre entre ces forces et le mouvement perdu par le corps nous a donné les équations différentielles de son mouvement. Nous allons faire usage de la même méthode pour déterminer le mouvement d'un système de corps m, m', m'',.... Soient donc $m\mathrm{P}$, $m\mathrm{Q}$, $m\mathrm{R}$ les forces qui sollicitent m parallèlement aux axes de ses coordonnées rectangles x, y, z; soient $m'\mathrm{P}'$, $m'\mathrm{Q}'$, $m'\mathrm{R}'$ les forces qui sollicitent m' parallèlement aux mêmes axes, et ainsi de suite, et nommons t le temps. Les forces partielles $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ du corps m, à un instant quelconque, deviendront dans l'instant suivant

$$m\frac{dx}{dt} + m\,d\frac{dx}{dt} - m\,d\frac{dx}{dt} + m\mathrm{P}\,dt,$$

$$m\frac{dy}{dt} + m\,d\frac{dy}{dt} - m\,d\frac{dy}{dt} + m\mathrm{Q}\,dt,$$

$$m\frac{dz}{dt} + m\,d\frac{dz}{dt} - m\,d\frac{dz}{dt} + m\mathrm{R}\,dt;$$

et, comme les seules forces

$$m\frac{dx}{dt} + m\,d\frac{dx}{dt},\quad m\frac{dy}{dt} + m\,d\frac{dy}{dt},\quad m\frac{dz}{dt} + m\,d\frac{dz}{dt}$$

subsistent, les forces

$$-m\,d\frac{dx}{dt}+m\mathrm{P}\,dt,\quad -m\,d\frac{dy}{dt}+m\mathrm{Q}\,dt,\quad -m\,d\frac{dz}{dt}+m\mathrm{R}\,dt$$

seront détruites. En marquant dans ces expressions successivement d'un trait, de deux traits,... les lettres m, x, y, z, P, Q, R, on aura les forces détruites dans les corps m', m'',.... Cela posé, si l'on multiplie respectivement ces forces par les variations δx, δy, δz, $\delta x'$,... de leurs directions, le principe des vitesses virtuelles, exposé dans le n° 14, donnera, en supposant dt constant, l'équation suivante

$$(\mathrm{P})\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & m\,\delta x\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{P}\right)+m\,\delta y\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\mathrm{Q}\right)+m\,\delta z\left(\frac{d^2z}{dt^2}-\mathrm{R}\right)\\ & +m'\delta x'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-\mathrm{P}'\right)+m'\delta y'\left(\frac{d^2y'}{dt^2}-\mathrm{Q}'\right)+m'\delta z'\left(\frac{d^2z'}{dt^2}-\mathrm{R}'\right)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On éliminera de cette équation, au moyen des conditions particulières du système, autant de variations qu'il y a de ces conditions; en égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des variations restantes, on aura toutes les équations nécessaires pour déterminer le mouvement des différents corps du système.

19. L'équation (P) renferme plusieurs principes généraux du mouvement, que nous allons développer. On assujettira évidemment les variations δx, δy, δz, $\delta x'$,... à toutes les conditions de la liaison des parties du système, en les supposant égales aux différences dx, dy, dz, dx',.... Cette supposition est donc permise, et alors l'équation (P) donne, en l'intégrant,

$$(\mathrm{Q})\qquad \Sigma\,m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=c+2\Sigma\int m\,(\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{R}\,dz),$$

c étant une constante arbitraire introduite par l'intégration.

Si les forces P, Q, R sont le résultat de forces attractives dirigées vers des points fixes, et des forces attractives des corps les uns vers les

autres, la fonction $\Sigma \int m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz)$ est une intégrale exacte. En effet, les parties de cette fonction, relatives aux forces attractives dirigées vers des points fixes, sont, par le n° 8, des intégrales exactes. Cela est également vrai par rapport aux parties qui dépendent des attractions mutuelles des corps du système; car, si l'on nomme f la distance de m à m', et $m'\mathrm{F}$ l'attraction de m' sur m, la partie de $m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz)$, relative à l'attraction de m' sur m, sera, par le numéro cité, égale à $-mm'\mathrm{F}\,df$, la différence df étant prise en ne faisant varier que les coordonnées x, y, z. Mais, la réaction étant égale et contraire à l'action, la partie de $m'(\mathrm{P}'dx' + \mathrm{Q}'dy' + \mathrm{R}'dz')$, relative à l'attraction de m sur m', est égale à $-mm'\mathrm{F}\,df$, en ne faisant varier, dans f, que les coordonnées x', y', z'; la partie de la fonction $\Sigma m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz)$, relative à l'attraction réciproque de m et de m', est donc $-mm'\mathrm{F}\,df$, tout étant supposé varier dans f. Cette quantité est une différence exacte lorsque F est une fonction de f, ou lorsque l'attraction est comme une fonction de la distance, ainsi que nous le supposerons toujours; la fonction $\Sigma m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz)$ est donc une différence exacte, toutes les fois que les forces qui agissent sur les corps du système sont le résultat de leur attraction mutuelle, ou de forces attractives dirigées vers des points fixes. Soit alors $d\varphi$ cette différence, et nommons v la vitesse de m, v' celle de m', etc.; on aura

$$(\mathrm{R}) \qquad \Sigma m v^2 = c + 2\varphi.$$

Cette équation est analogue à l'équation (g) du n° 8; elle est la traduction analytique du principe de la conservation des *forces vives*. On nomme *force vive* d'un corps le produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Le principe dont il s'agit consiste en ce que la somme des forces vives, ou la force vive totale du système, est constante, si le système n'est sollicité par aucune force; et, si les corps sont sollicités par des forces quelconques, la somme des accroissements de la force vive totale est la même, quelles que soient les courbes décrites par chacun de ces corps, pourvu que leurs points de départ et d'arrivée soient les mêmes.

Ce principe n'a lieu que dans les cas où les mouvements des corps

changent par des nuances insensibles. Si ces mouvements éprouvent des changements brusques, la force vive est diminuée d'une quantité que l'on déterminera de cette manière. L'analyse qui nous a conduits à l'équation (P) du numéro précédent donne alors, au lieu de cette équation, la suivante

$$0 = \Sigma m\left(\frac{\delta x}{dt}\cdot\Delta\frac{dx}{dt} + \frac{\delta y}{dt}\cdot\Delta\frac{dy}{dt} + \frac{\delta z}{dt}\cdot\Delta\frac{dz}{dt}\right) - \Sigma m(\mathrm{P}\,\delta x + \mathrm{Q}\,\delta y + \mathrm{R}\,\delta z),$$

$\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$ et $\Delta\frac{dz}{dt}$ étant les différences de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ d'un instant à l'autre, différences qui deviennent finies lorsque les mouvements des corps reçoivent des altérations finies dans un instant. On peut supposer dans cette équation

$$\delta x = dx + \Delta\,dx,\quad \delta y = dy + \Delta\,dy,\quad \delta z = dz + \Delta\,dz,$$

parce que, les valeurs de dx, dy, dz se changeant, dans l'instant suivant, dans $dx + \Delta\,dx$, $dy + \Delta\,dy$, $dz + \Delta\,dz$, ces valeurs de δx, δy, δz satisfont aux conditions de la liaison des parties du système; on aura ainsi

$$\begin{aligned}0 = \Sigma m&\left[\left(\frac{dx}{dt} + \Delta\frac{dx}{dt}\right)\cdot\Delta\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} + \Delta\frac{dy}{dt}\right)\cdot\Delta\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dz}{dt} + \Delta\frac{dz}{dt}\right)\cdot\Delta\frac{dz}{dt}\right]\\ &- \Sigma m[\mathrm{P}(dx + \Delta\,dx) + \mathrm{Q}(dy + \Delta\,dy) + \mathrm{R}(dz + \Delta\,dz)].\end{aligned}$$

Cette équation doit être intégrée comme une équation aux différences finies relative au temps t, dont les variations sont infiniment petites, ainsi que les variations de x, y, z, x', ... Désignons par $\Sigma_{,}$ les intégrales finies résultant de cette intégration, pour les distinguer des intégrales finies précédentes, relatives à l'ensemble des corps du système. L'intégrale de $m\mathrm{P}(dx + \Delta\,dx)$ est visiblement la même que $\int m\mathrm{P}\,dx$; on aura donc

$$\begin{aligned}\text{const.} = \Sigma m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} &+ \Sigma_{,}.\Sigma m\left[\left(\Delta\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\\ &- 2\Sigma\int m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz).\end{aligned}$$

En désignant donc par v, v', v'',... les vitesses de m, m', m'',..., on aura

$$\Sigma\, mv^2 = \text{const.} - \Sigma_{,}.\Sigma\, m\left[\left(\Delta\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ 2\Sigma\int m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz).$$

La quantité renfermée sous le signe $\Sigma_{,}$ étant nécessairement positive, on voit que la force vive du système diminue par l'action mutuelle des corps, toutes les fois que, durant le mouvement, quelques-unes des variations $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$,$\cdots$ sont finies. L'équation précédente offre de plus un moyen fort simple d'avoir cette diminution.

A chaque variation brusque du mouvement du système, on peut concevoir la vitesse de m décomposée en deux autres, l'une v qui subsiste dans l'instant suivant, l'autre V détruite par l'action des autres corps; or la vitesse de m étant $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$ avant cette décomposition, et se changeant, après, dans

$$\frac{\sqrt{(dx + \Delta\,dx)^2 + (dy + \Delta\,dy)^2 + (dz + \Delta\,dz)^2}}{dt},$$

il est facile de voir que l'on a

$$\mathrm{V}^2 = \left(\Delta\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

l'équation précédente peut donc être mise sous cette forme :

$$\Sigma\, mv^2 = \text{const.} - \Sigma_{,}.\Sigma\, m\mathrm{V}^2 + 2\Sigma\int m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz).$$

20. Si dans l'équation (P) du n° 18 on suppose

$$\delta x' = \delta x + \delta x'_{,}, \quad \delta y' = \delta y + \delta y'_{,}, \quad \delta z' = \delta z + \delta z'_{,},$$
$$\delta x'' = \delta x + \delta x''_{,}, \quad \delta y'' = \delta y + \delta y''_{,}, \quad \delta z'' = \delta z + \delta z''_{,},$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

en substituant ces variations dans les expressions des variations δf, $\delta f'$, $\delta f''$,... des distances mutuelles des corps du système, dont on a donné

les valeurs dans le n° 15, on voit que les variations δx, δy, δz disparaissent de ces expressions. Si le système est libre, c'est-à-dire, si aucune de ses parties n'a de liaison avec les corps étrangers, les conditions relatives à la liaison mutuelle des corps ne dépendant que de leurs distances mutuelles, les variations δx, δy, δz seront indépendantes de ces conditions : d'où il suit qu'en substituant, au lieu de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$,..., leurs valeurs précédentes dans l'équation (P), on doit égaler séparément à zéro les coefficients des variations δx, δy, δz; ce qui donne les trois équations

$$o = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - P\right), \quad o = \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Q\right), \quad o = \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2} - R\right).$$

Supposons que X, Y, Z soient les trois coordonnées du centre de gravité du système; on aura, par le n° 15,

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m};$$

partant

$$o = \frac{d^2X}{dt^2} - \frac{\Sigma mP}{\Sigma m}, \quad o = \frac{d^2Y}{dt^2} - \frac{\Sigma mQ}{\Sigma m}, \quad o = \frac{d^2Z}{dt^2} - \frac{\Sigma mR}{\Sigma m};$$

le centre de gravité du système se meut donc comme si, tous les corps m, m',... étant réunis à ce centre, on lui appliquait toutes les forces qui sollicitent le système.

Si le système n'est soumis qu'à l'action mutuelle des corps qui le composent et à leurs attractions réciproques, on aura

$$o = \Sigma mP, \quad o = \Sigma mQ, \quad o = \Sigma mR;$$

car, en exprimant par p l'action réciproque de m et de m', quelle que soit sa nature, et désignant par f la distance mutuelle de ces deux corps, on aura, en vertu de cette action seule,

$$mP = \frac{p(x-x')}{f}, \quad mQ = \frac{p(y-y')}{f}, \quad mR = \frac{p(z-z')}{f},$$

$$m'P' = \frac{p(x'-x)}{f}, \quad m'Q' = \frac{p(y'-y)}{f}, \quad m'R' = \frac{p(z'-z)}{f},$$

d'où l'on tire

$$o = mP + m'P', \quad o = mQ + m'Q', \quad o = mR + m'R';$$

et il est clair que ces équations ont lieu dans le cas même où les corps exerceraient les uns sur les autres une action finie dans un instant. Leur action réciproque disparaît donc des intégrales ΣmP, ΣmQ, ΣmR, qui par conséquent sont nulles lorsque le système n'est point sollicité par des forces étrangères. Dans ce cas, on a

$$o = \frac{d^2X}{dt^2}, \quad o = \frac{d^2Y}{dt^2}, \quad o = \frac{d^2Z}{dt^2},$$

et, en intégrant,

$$X = a + bt, \quad Y = a' + b't, \quad Z = a'' + b''t,$$

a, b, a', b', a'', b'' étant des constantes arbitraires. En éliminant le temps t, on aura une équation du premier ordre, soit entre X et Y, soit entre X et Z; d'où il suit que le mouvement du centre de gravité est rectiligne. De plus, sa vitesse étant égale à

$$\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2}, \quad \text{ou à} \quad \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2},$$

elle est constante, et le mouvement est uniforme.

Il est clair, d'après l'analyse précédente, que cette inaltérabilité du mouvement du centre de gravité d'un système de corps, quelle que soit leur action mutuelle, subsiste dans le cas même où quelques-uns de ces corps perdent dans un instant, par cette action, une quantité finie de mouvement.

21. Si l'on fait

$$\delta x' = \frac{y'\delta x}{y} + \delta x'_1, \quad \delta x'' = \frac{y''\delta x}{y} + \delta x''_1, \ldots,$$

$$\delta y = \frac{-x\delta x}{y} + \delta y_1, \quad \delta y' = \frac{-x'\delta x}{y} + \delta y'_1, \quad \delta y'' = \frac{-x''\delta x}{y} + \delta y''_1, \ldots,$$

la variation δx disparaît encore des expressions de δf, $\delta f'$, $\delta f''$, ...; en

supposant donc le système libre, les conditions relatives à la liaison des parties du système n'influant que sur les variations δf, $\delta f'$,..., la variation δx en est indépendante, et elle est arbitraire; ainsi, en substituant dans l'équation (P) du n° 18, au lieu de $\delta x'$, $\delta x''$,..., δy, $\delta y'$, $\delta y''$,..., leurs valeurs précédentes, on doit égaler séparément à zéro le coefficient de δx, ce qui donne

$$0 = \Sigma m \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} + \Sigma m(Py - Qx),$$

d'où l'on tire, en intégrant par rapport au temps t,

$$c = \Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} + \Sigma \int m(Py - Qx)\,dt,$$

c étant une constante arbitraire.

On peut, dans cette intégrale, changer les coordonnées y, y',... dans z, z',..., pourvu que l'on y substitue, au lieu des forces Q, Q',..., parallèles à l'axe des y, les forces R, R',..., parallèles à l'axe des z, ce qui donne

$$c' = \Sigma m \frac{x\,dz - z\,dx}{dt} + \Sigma \int m(Pz - Rx)\,dt,$$

c' étant une nouvelle arbitraire. On aura de la même manière

$$c'' = \Sigma m \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} + \Sigma \int m(Qz - Ry)\,dt,$$

c'' étant une troisième arbitraire.

Supposons que les corps du système ne soient soumis qu'à leur action mutuelle et à une force dirigée vers l'origine des coordonnées. Si l'on nomme, comme ci-dessus, p l'action réciproque de m et de m', on aura, en vertu de cette action seule,

$$0 = m(Py - Qx) + m'(P'y' - Q'x');$$

ainsi l'action mutuelle des corps disparaît de l'intégrale finie $\Sigma m(Py - Qx)$. Soit S la force qui sollicite m vers l'origine des coor-

données; on aura, en vertu de cette force seule,

$$P = \frac{-Sx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad Q = \frac{-Sy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

la force S disparaît donc de l'expression de $Py - Qx$; ainsi, dans le cas où les différents corps du système ne sont sollicités que par leur action et leur attraction mutuelle et par des forces dirigées vers l'origine des coordonnées, on a

$$(Z) \quad c = \Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}, \quad c' = \Sigma m \frac{x\,dz - z\,dx}{dt}, \quad c'' = \Sigma m \frac{y\,dz - z\,dy}{dt}.$$

Si l'on projette le corps m sur le plan des x et des y, la différentielle $\frac{x\,dy - y\,dx}{2}$ sera l'aire que trace, durant l'instant dt, le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées à la projection de m; la somme de ces aires, multipliées respectivement par les masses de ces corps, est donc proportionnelle à l'élément du temps; d'où il suit que, dans un temps fini, elle est proportionnelle au temps. C'est en cela que consiste le principe de la conservation des aires.

Le plan fixe des x et des y étant arbitraire, ce principe a lieu pour un plan quelconque, et, si la force S est nulle, c'est-à-dire, si les corps ne sont assujettis qu'à leur action et à leur attraction mutuelle, l'origine des coordonnées est arbitraire, et l'on peut placer à volonté le point fixe. Enfin il est facile de voir, par ce qui précède, que ce principe subsiste dans le cas même où, par l'action mutuelle des corps du système, il survient des changements brusques dans leurs mouvements.

Il existe un plan par rapport auquel c' et c'' sont nuls, et qu'il est, par cette raison, intéressant de connaître; car il est visible que l'égalité de c' et de c'' à zéro doit apporter de grandes simplifications dans la recherche du mouvement d'un système de corps. Pour déterminer ce plan, il est nécessaire de rapporter les coordonnées x, y, z à trois autres axes ayant la même origine que les précédents. Soient donc θ l'inclinaison du plan cherché, formé par deux de ces nouveaux axes, au plan

des x et des y, et ψ l'angle que forme l'axe des x avec l'intersection de ces deux plans, en sorte que $\frac{\pi}{2} - \theta$ soit l'inclinaison du troisième axe nouveau sur le plan des x et des y, et que $\frac{\pi}{2} - \psi$ soit l'angle que sa projection sur le même plan fait avec l'axe des x, π étant la demi-circonférence.

Pour fixer les idées, imaginons que l'origine des coordonnées soit au centre de la Terre, que le plan des x et des y soit celui de l'écliptique, et que l'axe des z soit la ligne menée du centre de la Terre au pôle boréal de l'écliptique; concevons, de plus, que le plan cherché soit celui de l'équateur, et que le troisième axe nouveau soit l'axe de rotation de la Terre, dirigé vers le pôle boréal; θ sera l'obliquité de l'écliptique, et ψ sera la longitude de l'axe fixe des x, relativement à l'équinoxe mobile du printemps. Les deux premiers axes nouveaux seront dans le plan de l'équateur, et, en nommant φ la distance angulaire du premier de ces axes à cet équinoxe, φ représentera la rotation de la Terre, comptée du même équinoxe, et $\frac{\pi}{2} + \varphi$ sera la distance angulaire du second de ces axes au même équinoxe. Nous nommerons *axes principaux* ces trois nouveaux axes. Cela posé :

Soient $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées de m rapportées : 1° à la ligne menée de l'origine des coordonnées à l'équinoxe du printemps, les $x_{,}$ positifs étant pris du côté de cet équinoxe; 2° à la projection du troisième axe principal sur le plan des x et des y; 3° à l'axe des z; on aura

$$x = x_{,} \cos\psi + y_{,} \sin\psi, \quad y = y_{,} \cos\psi - x_{,} \sin\psi, \quad z = z_{,}.$$

Soient $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ les coordonnées rapportées : 1° à la ligne de l'équinoxe du printemps; 2° à la perpendiculaire à cette ligne dans le plan de l'équateur; 3° au troisième axe principal; on aura

$$x_{,} = x_{,,}, \quad y_{,} = y_{,,} \cos\theta + z_{,,} \sin\theta, \quad z_{,} = z_{,,} \cos\theta - y_{,,} \sin\theta.$$

Enfin, soient $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ les coordonnées de m rapportées au premier, au second et au troisième axe principal; on aura

$$x_{,} = x_{,,,} \cos\varphi - y_{,,,} \sin\varphi, \quad y_{,,} = y_{,,,} \cos\varphi + x_{,,,} \sin\varphi, \quad z_{,,} = z_{,,,}.$$

De là il est facile de conclure

$$x = x_{\prime\prime}(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) + y_{\prime\prime}(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) + z_{\prime\prime} \sin\theta \sin\psi,$$
$$y = x_{\prime\prime}(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) + y_{\prime\prime}(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) + z_{\prime\prime} \sin\theta \cos\psi,$$
$$z = z_{\prime\prime} \cos\theta - y_{\prime\prime} \sin\theta \cos\varphi - x_{\prime\prime} \sin\theta \sin\varphi.$$

En multipliant ces valeurs de x, y, z respectivement par les coefficients de $x_{\prime\prime}$ dans ces valeurs, on aura, en les ajoutant,

$$x_{\prime\prime} = x(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) + y(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) - z \sin\theta \sin\varphi.$$

En multipliant pareillement les valeurs de x, y, z respectivement par les coefficients de $y_{\prime\prime}$ dans ces valeurs, et ensuite par les coefficients de $z_{\prime\prime}$, on aura

$$y_{\prime\prime} = x(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) + y(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) - z \sin\theta \cos\varphi,$$
$$z_{\prime\prime} = x \sin\theta \sin\psi + y \sin\theta \cos\psi + z \cos\theta.$$

Ces diverses transformations des coordonnées nous seront très-utiles dans la suite. En marquant d'un trait en haut, de deux traits, etc. les coordonnées x, y, z, $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$, on aura les coordonnées correspondantes aux corps m', m'', ...

De là, en substituant c, c', c'' au lieu de

$$\Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}, \quad \Sigma m \frac{x\,dz - z\,dx}{dt}, \quad \Sigma m \frac{y\,dz - z\,dy}{dt},$$

il est facile de conclure

$$\Sigma m \frac{x_{\prime\prime}\,dy_{\prime\prime} - y_{\prime\prime}\,dx_{\prime\prime}}{dt} = c \cos\theta - c' \sin\theta \cos\psi + c'' \sin\theta \sin\psi,$$
$$\Sigma m \frac{x_{\prime\prime}\,dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime}\,dx_{\prime\prime}}{dt} = c \sin\theta \cos\varphi + c'(\sin\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\psi \cos\varphi) + c''(\cos\psi \sin\varphi - \cos\theta \sin\psi \cos\varphi),$$
$$\Sigma m \frac{y_{\prime\prime}\,dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime}\,dy_{\prime\prime}}{dt} = -c \sin\theta \sin\varphi + c'(\sin\psi \cos\varphi - \cos\theta \cos\psi \sin\varphi) + c''(\cos\psi \cos\varphi + \cos\theta \sin\psi \sin\varphi).$$

Si l'on détermine ψ et θ de manière que l'on ait

$$\sin\theta\sin\psi = \frac{c''}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}}, \quad \sin\theta\cos\psi = \frac{-c'}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

ce qui donne

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

on aura

$$\Sigma m \frac{x_{,,}dy_{,,} - y_{,,}dx_{,,}}{dt} = \sqrt{c^2+c'^2+c''^2},$$

$$\Sigma m \frac{x_{,,}dz_{,,} - z_{,,}dx_{,,}}{dt} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{y_{,,}dz_{,,} - z_{,,}dy_{,,}}{dt} = 0;$$

les valeurs de c' et de c'' sont donc nulles par rapport au plan des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$ déterminé de cette manière. Il n'existe qu'un seul plan qui jouisse de cette propriété; car, en supposant qu'il soit celui des x et des y, on aura

$$\Sigma m \frac{x_{,,}dz_{,,} - z_{,,}dx_{,,}}{dt} = c\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\Sigma m \frac{y_{,,}dz_{,,} - z_{,,}dy_{,,}}{dt} = -c\sin\theta\sin\varphi.$$

En égalant ces deux fonctions à zéro, on aura $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire que le plan des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$ coïncide alors avec celui des x et des y.

La valeur de $\Sigma m \frac{x_{,,}dy_{,,} - y_{,,}dx_{,,}}{dt}$ étant égale à $\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}$, quel que soit le plan des x et des y, il en résulte que la quantité $c^2+c'^2+c''^2$ est la même, quel que soit ce plan, et que le plan des $x_{,,}$ et des $y_{,,}$, déterminé par ce qui précède, est celui relativement auquel la fonction $\Sigma m \frac{x_{,,}dy_{,,} - y_{,,}dx_{,,}}{dt}$ est le plus grande; le plan dont il s'agit jouit donc de ces propriétés remarquables, savoir : 1° que la somme des aires tracées par les projections des rayons vecteurs des corps, et multipliées respectivement par leurs masses, y est le plus grande possible; 2° que la même somme, relativement à un plan quelconque qui lui est per-

pendiculaire, est nulle, puisque l'angle φ reste indéterminé. On pourra, au moyen de ces propriétés, retrouver ce plan à un instant quelconque, quelles que soient les variations survenues par l'action mutuelle des corps dans leur position respective, de même que l'on peut facilement retrouver dans tous les temps la position du centre de gravité du système; et, par cette raison, il est aussi naturel de rapporter à ce plan les x et les y que de rapporter au centre de gravité l'origine des coordonnées.

22. Les principes de la conservation des forces vives et des aires ont encore lieu, en supposant à l'origine des coordonnées un mouvement rectiligne et uniforme dans l'espace. Pour le démontrer, nommons X, Y, Z les coordonnées de cette origine, supposée mobile, par rapport à un point fixe, et supposons

$$\begin{array}{lll} x = X + x_1, & y = Y + y_1, & z = Z + z_1, \\ x' = X + x'_1, & y' = Y + y'_1, & z' = Z + z'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

x_1, y_1, z_1, x'_1,... seront les coordonnées de m, m',... relativement à l'origine mobile. On aura, par l'hypothèse,

$$d^2X = 0, \quad d^2Y = 0, \quad d^2Z = 0;$$

mais on a, par la nature du centre de gravité, lorsque le système est libre,

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma m(d^2X + d^2x_1) - \Sigma m P\,dt^2, \\ 0 &= \Sigma m(d^2Y + d^2y_1) - \Sigma m Q\,dt^2, \\ 0 &= \Sigma m(d^2Z + d^2z_1) - \Sigma m R\,dt^2. \end{aligned}$$

L'équation (P) du n° 18 deviendra ainsi, en y substituant $\delta X + \delta x_1$, $\delta Y + \delta y_1$,... au lieu de δx, δy, ...,

$$0 = \Sigma m\,\delta x_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} - P\right) + \Sigma m\,\delta y_1\left(\frac{d^2y_1}{dt^2} - Q\right) + \Sigma m\,\delta z_1\left(\frac{d^2z_1}{dt^2} - R\right),$$

équation exactement de la même forme que l'équation (P), si les forces

P, Q, R ne dépendent que des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x'_{,}$, ... En lui appliquant donc l'analyse précédente, on en tirera les principes de la conservation des forces vives et des aires par rapport à l'origine mobile des coordonnées.

Si le système n'éprouve point l'action de forces étrangères, son centre de gravité aura un mouvement rectiligne et uniforme dans l'espace, comme on l'a vu dans le n° 20; en fixant donc à ce centre l'origine des coordonnées x, y, z, ces principes subsisteront toujours. X, Y, Z étant alors les coordonnées du centre de gravité, on aura, par la nature de ce point,

$$o = \Sigma m x_{,}, \quad o = \Sigma m y_{,}, \quad o = \Sigma m z_{,},$$

ce qui donne

$$\Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \frac{X\,dY - Y\,dX}{dt} \Sigma m + \Sigma m \frac{x_{,}\,dy_{,} - y_{,}\,dx_{,}}{dt}, \ldots,$$

$$\Sigma m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{dt^2} \Sigma m + \Sigma m \frac{dx_{,}^2 + dy_{,}^2 + dz_{,}^2}{dt^2}.$$

Ainsi les quantités résultantes des principes précédents se composent : 1° des quantités qui auraient lieu si tous les corps du système étaient réunis à leur centre commun de gravité; 2° des quantités relatives au centre de gravité supposé immobile; et, comme les premières de ces quantités sont constantes, on voit la raison pour laquelle les principes dont il s'agit ont lieu par rapport au centre de gravité. En fixant donc à ce point l'origine des coordonnées x, y, z, x',... des équations (Z) du numéro précédent, elles subsisteront toujours; d'où il résulte que le plan passant constamment par ce centre, et relativement auquel la fonction $\Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ est un maximum, reste toujours parallèle à lui-même pendant le mouvement du système, et que la même fonction relative à tout autre plan qui lui est perpendiculaire est nulle.

Les principes de la conservation des aires et des forces vives peuvent se réduire à des relations entre les coordonnées des distances mutuelles des corps du système. En effet, l'origine des x, des y et des z étant

toujours supposée au centre de gravité, les équations (Z) du numéro précédent peuvent être mises sous la forme

$$c\,\Sigma m = \Sigma mm'\,\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt},$$

$$c'\,\Sigma m = \Sigma mm'\,\frac{(x'-x)(dz'-dz)-(z'-z)(dx'-dx)}{dt},$$

$$c''\Sigma m = \Sigma mm'\,\frac{(y'-y)(dz'-dz)-(z'-z)(dy'-dy)}{dt}.$$

On peut observer que les seconds membres de ces équations multipliées par dt expriment la somme des projections des aires élémentaires tracées par chaque droite qui joint deux corps du système, dont l'un est supposé se mouvoir autour de l'autre considéré comme immobile, chaque aire étant multipliée par le produit des deux masses que joint la droite.

Si l'on applique aux équations précédentes l'analyse du n° 21, on verra que le plan passant constamment par l'un quelconque des corps du système, et relativement auquel la fonction

$$\Sigma mm'\,\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt}$$

est un maximum, reste toujours parallèle à lui-même dans le mouvement du système, et que ce plan est parallèle au plan passant par le centre de gravité, et relativement auquel la fonction $\Sigma m\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}$ est un maximum. On verra encore que les seconds membres des équations précédentes sont nuls relativement à tout plan passant par le même corps et perpendiculaire au plan dont il s'agit.

L'équation (Q) du n° 19 peut être mise sous la forme

$$\Sigma mm'\,\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2} = \text{const.} - 2\Sigma m.\Sigma\!\int mm'\,\mathrm{F}\,df,$$

équation relative aux seules coordonnées des distances mutuelles des corps, et dans laquelle le premier membre exprime la somme des car-

rés des vitesses relatives des corps du système les uns autour des autres, en les considérant deux à deux, et en supposant l'un des deux immobile, chaque carré étant multiplié par le produit des deux masses que l'on considère.

23. Reprenons l'équation (R) du n° 19; en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, on aura

$$\Sigma\, m v\, \delta v = \Sigma\, m(P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z);$$

l'équation (P) du n° 18 devient ainsi

$$o = \Sigma\, m\left(\delta x . d\frac{dx}{dt} + \delta y . d\frac{dy}{dt} + \delta z . d\frac{dz}{dt}\right) - \Sigma\, m\, dt . v\,\delta v.$$

Soient ds l'élément de la courbe décrite par m, ds' l'élément de la courbe décrite par m',...; on aura

$$v\,dt = ds, \qquad v'dt = ds', \ldots,$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \ldots,$$

d'où l'on tirera, en suivant l'analyse du n° 8,

$$\Sigma\, m\,\delta(v\,ds) = \Sigma\, m\, d\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}.$$

En intégrant par rapport à la caractéristique différentielle d, et en étendant les intégrales aux courbes entières décrites par les corps m, m',..., on aura

$$\Sigma\,\delta\!\int m v\, ds = \text{const.} + \Sigma\, m\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt},$$

les variations δx, δy, δz,... étant, ainsi que la constante du second membre de cette équation, relatives aux points extrêmes des courbes décrites par m, m',....

Il suit de là que, si ces points sont supposés invariables, on a

$$o = \Sigma\,\delta\!\int m v\, ds,$$

c'est-à-dire que la fonction $\Sigma \int mv\,ds$ est un minimum. C'est en cela que consiste le principe de la moindre action, dans le mouvement d'un système de corps, principe qui, comme l'on voit, n'est qu'un résultat mathématique des lois primordiales de l'équilibre et du mouvement de la matière. On voit en même temps que ce principe, combiné avec celui des forces vives, donne l'équation (P) du n° 18, qui renferme tout ce qui est nécessaire à la détermination des mouvements du système. Enfin on voit, par le n° 22, que ce principe a lieu encore quand l'origine des coordonnées est mobile, pourvu que son mouvement soit rectiligne et uniforme, et que le système soit libre.

CHAPITRE VI.

DES LOIS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS, DANS TOUTES LES RELATIONS MATHÉMATIQUEMENT POSSIBLES ENTRE LA FORCE ET LA VITESSE.

24. Nous avons observé, dans le n° 5, qu'il y a une infinité de manières d'exprimer la force par la vitesse, qui n'impliquent point contradiction. La plus simple de toutes est celle de la force proportionnelle à la vitesse, et nous avons vu qu'elle est la loi de la nature. C'est d'après cette loi que nous avons exposé, dans le Chapitre précédent, les équations différentielles du mouvement d'un système de corps; mais il est facile d'étendre l'analyse dont nous avons fait usage à toutes les lois mathématiquement possibles entre la vitesse et la force, et de présenter ainsi, sous un nouveau point de vue, les principes généraux du mouvement. Pour cela, supposons que, F étant la force et v la vitesse, on ait $F = \varphi(v)$, $\varphi(v)$ étant une fonction quelconque de v; désignons par $\varphi'(v)$ la différence de $\varphi(v)$ divisée par dv. Les dénominations des numéros précédents subsistant toujours, le corps m sera animé, parallèlement à l'axe des x, de la force $\varphi(v)\frac{dx}{ds}\cdot$ Dans l'instant suivant, cette force deviendra

$$\varphi(v)\frac{dx}{ds} + d\left(\varphi(v)\frac{dx}{ds}\right), \quad \text{ou} \quad \varphi(v)\frac{dx}{ds} + d\left(\frac{\varphi(v)}{v}\frac{dx}{dt}\right),$$

parce que $\frac{ds}{dt} = v$. Maintenant, P, Q, R étant les forces qui animent le corps m parallèlement aux axes des coordonnées, le système sera, par le n° 18, en équilibre en vertu de ces forces et des différentielles

$d\left(\frac{dx}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, prises avec un signe contraire; on aura donc, au lieu de l'équation (P) du même numéro, celle-ci

$$\text{(S)}\quad o = \Sigma m\left\{\delta x\left[d\left(\frac{dx}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{P}\,dt\right] + \delta y\left[d\left(\frac{dy}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{Q}\,dt\right] + \delta z\left[d\left(\frac{dz}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{R}\,dt\right]\right\},$$

qui n'en diffère qu'en ce que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ y sont multipliés par la fonction $\frac{\varphi(v)}{v}$, qui, dans le cas de la force proportionnelle à la vitesse, peut être supposée égale à l'unité. Mais cette différence rend très-difficile la solution des problèmes de Mécanique. Cependant on peut tirer de l'équation (S) des principes analogues à ceux de la conservation des forces vives, des aires et du centre de gravité.

Si l'on change δx en dx, δy en dy, δz en dz, etc., on aura

$$\Sigma m\left[\delta x\, d\left(\frac{dx}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) + \delta y\, d\left(\frac{dy}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) + \delta z\, d\left(\frac{dz}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right] = \Sigma m v\, dv\, dt\, \varphi'(v),$$

et par conséquent

$$\Sigma \int m v\, dv\, \varphi'(v) = \text{const.} + \Sigma \int m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz).$$

En supposant $\Sigma m(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz)$ une différentielle exacte égale à $d\lambda$, on aura

$$\text{(T)}\qquad \Sigma \int m v\, dv\, \varphi'(v) = \text{const.} + \lambda,$$

équation analogue à l'équation (R) du n° 19, et qui se change en elle dans le cas de la nature, où $\varphi'(v) = 1$. Le principe de la conservation des forces vives a donc lieu dans toutes les lois mathématiquement possibles entre la force et la vitesse, pourvu que l'on entende par *force vive* d'un corps le produit de sa masse par le double de l'intégrale de sa vitesse multipliée par la différentielle de la fonction de la vitesse qui exprime la force.

Si l'on fait, dans l'équation (S),

$$\delta x' = \delta x + \delta x'_{,}, \quad \delta y' = \delta y + \delta y'_{,}, \quad \delta z' = \delta z + \delta z'_{,}, \quad \delta x'' = \delta x + \delta x''_{,}, \ldots,$$

on aura, en égalant séparément à zéro les coefficients de δx, δy, δz,

$$o = \Sigma m\left[d\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{P}dt\right], \quad o = \Sigma m\left[d\left(\frac{dy}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{Q}dt\right],$$

$$o = \Sigma m\left[d\left(\frac{dz}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right) - \mathrm{R}dt\right].$$

Ces trois équations sont analogues à celles du n° 20, d'où nous avons conclu la conservation du mouvement du centre de gravité, dans le cas de la nature, lorsque le système n'est assujetti à d'autres forces qu'à l'action et à l'attraction mutuelle des corps du système. Dans ce cas, $\Sigma m\mathrm{P}$, $\Sigma m\mathrm{Q}$, $\Sigma m\mathrm{R}$ sont nuls, et l'on a

$$\text{const.} = \Sigma m\frac{dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}, \quad \text{const.} = \Sigma m\frac{dy}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}, \quad \text{const.} = \Sigma m\frac{dz}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}.$$

$m\frac{dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}$ est égal à $m\varphi(v)\frac{dx}{ds}$, et cette dernière quantité est la force finie du corps décomposée parallèlement à l'axe des x, la force d'un corps étant le produit de sa masse par la fonction de la vitesse qui exprime la force. Ainsi la somme des forces finies du système, décomposées parallèlement à un axe quelconque, est alors constante, quel que soit le rapport de la force à la vitesse; et ce qui distingue l'état du mouvement de celui du repos est que, dans ce dernier état, cette même somme est nulle. Ces résultats sont communs à toutes les lois mathématiquement possibles entre la force et la vitesse; mais ce n'est que dans la loi de la nature que le centre de gravité se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Supposons encore, dans l'équation (S),

$$\delta x' = \frac{y'\delta x}{y} + \delta x'_{,}, \quad \delta x'' = \frac{y''\delta x}{y} + \delta x''_{,}, \ldots,$$

$$\delta y = \frac{-x\delta x}{y} + \delta y_{,}, \quad \delta y' = \frac{-x'\delta x}{y} + \delta y'_{,}, \ldots;$$

la variation δx disparaîtra des variations des distances mutuelles $f, f', \ldots$ des corps du système, et des forces qui dépendent de ces quantités. Si le

système est libre d'obstacles étrangers, on aura, en égalant à zéro le coefficient de δx,

$$o = \Sigma m\left[x d\left(\frac{dy}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right) - y d\left(\frac{dx}{dt}\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right] + \Sigma m(Py - Qx)\,dt,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$c = \Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma \int m(Py - Qx)\,dt.$$

On aura pareillement

$$c' = \Sigma m \frac{x\,dz - z\,dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma \int m(Pz - Rx)\,dt,$$

$$c'' = \Sigma m \frac{y\,dz - z\,dy}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma \int m(Qz - Ry)\,dt,$$

c, c', c'' étant des constantes arbitraires.

Si le système n'est soumis qu'à l'action mutuelle de ses parties, on a, par le n° 21,

$$\Sigma m(Py - Qx) = o, \quad \Sigma m(Pz - Rx) = o, \quad \Sigma m(Qz - Ry) = o;$$

d'ailleurs, $m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\frac{\varphi(v)}{v}$ est le moment de la force finie dont le corps m est animé, décomposée parallèlement au plan des x et des y, pour faire tourner le système autour de l'axe des z; l'intégrale finie

$$\Sigma m \frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}$$

est donc la somme des moments de toutes les forces finies des corps du système, pour le faire tourner autour du même axe; cette somme est par conséquent constante. Elle est nulle dans l'état d'équilibre; il y a donc ici la même différence entre ces deux états que relativement à la somme des forces parallèles à un axe quelconque. Dans la loi de la nature, cette propriété indique que la somme des aires, décrites autour d'un point fixe par les projections des rayons vecteurs des corps, est

toujours la même en temps égal; mais cette constance des aires décrites n'a point lieu dans d'autres lois.

Si l'on différentie par rapport à la caractéristique δ la fonction $\Sigma\int m\varphi(v)\,ds$, on aura

$$\delta\Sigma\int m\,\varphi(v)\,ds = \Sigma\int m\,\varphi(v)\,\delta ds + \Sigma\int m\delta v\,\varphi'(v)\,ds;$$

mais on a

$$\delta ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds} = \frac{1}{v}\left(\frac{dx}{dt}\,d\delta x + \frac{dy}{dt}\,d\delta y + \frac{dz}{dt}\,d\delta z\right);$$

on aura donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\delta\Sigma\int m\,\varphi(v)\,ds = {} & \Sigma\frac{m\varphi(v)}{v}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right) \\ & - \Sigma\int m\left[\delta x\,d\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right) + \delta y\,d\left(\frac{dy}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right) + \delta z\,d\left(\frac{dz}{dt}\,\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right] \\ & + \Sigma\int m\,\delta v\,\varphi'(v)\,ds.\end{aligned}$$

Les points extrêmes des courbes décrites par les corps du système étant supposés fixes, le terme hors du signe $\int$ disparaît dans cette équation; on aura donc, en vertu de l'équation (S),

$$\delta\Sigma\int m\,\varphi(v)\,ds = \Sigma\int m\delta v\,\varphi'(v)\,ds - \Sigma\int m\,dt(\mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y + \mathrm{R}\delta z).$$

Mais l'équation (T), différentiée par rappórt à δ, donne

$$\Sigma\int m\delta v\,\varphi'(v)\,ds = \Sigma\int m\,dt(\mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y + \mathrm{R}\delta z);$$

on a donc

$$0 = \delta\Sigma\int m\,\varphi(v)\,ds.$$

Cette équation répond au principe de la moindre action dans la loi de la nature. $m\varphi(v)$ est la force entière du corps m; ainsi ce principe revient à ce que la somme des intégrales des forces finies des corps du système, multipliées respectivement par les éléments de leurs directions, est un minimum : présenté de cette manière, il convient à toutes les lois mathématiquement possibles entre la force et la vitesse. Dans

l'état de l'équilibre, la somme des forces multipliées par les éléments de leurs directions est nulle, en vertu du principe des vitesses virtuelles; ce qui distingue donc, à cet égard, l'état d'équilibre de celui du mouvement, est que la même fonction différentielle, qui est nulle dans l'état d'équilibre, donne, étant intégrée, un minimum dans l'état de mouvement.

CHAPITRE VII.

DES MOUVEMENTS D'UN CORPS SOLIDE DE FIGURE QUELCONQUE.

25. Les équations différentielles des mouvements de translation et de rotation d'un corps solide peuvent se déduire facilement de celles que nous avons développées dans le Chapitre V; mais leur importance dans la théorie du Système du monde nous engage à les développer avec étendue.

Imaginons un corps solide dont toutes les parties soient sollicitées par des forces quelconques. Nommons x, y, z les coordonnées orthogonales de son centre de gravité; $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ les coordonnées d'une molécule quelconque dm du corps, en sorte que x', y', z' soient les coordonnées de cette molécule, rapportées au centre de gravité du corps. Soient de plus P, Q, R les forces qui sollicitent la molécule parallèlement aux axes des x, des y et des z. Les forces détruites à chaque instant dans la molécule dm, parallèlement à ces axes, seront, par le nº 18, en considérant l'élément dt du temps comme constant,

$$-\frac{d^2x+d^2x'}{dt}dm+\mathrm{P}\,dt\,dm,$$

$$-\frac{d^2y+d^2y'}{dt}dm+\mathrm{Q}\,dt\,dm,$$

$$-\frac{d^2z+d^2z'}{dt}dm+\mathrm{R}\,dt\,dm.$$

Il faut donc que toutes les molécules animées de forces semblables se

tassent mutuellement équilibre. On a vu dans le n° 15 que, pour cela, il est nécessaire que la somme des forces parallèles au même axe soit nulle, ce qui donne les trois équations suivantes

$$S\frac{d^2x + d^2x'}{dt^2}\,dm = S\,P\,dm,$$

$$S\frac{d^2y + d^2y'}{dt^2}\,dm = S\,Q\,dm,$$

$$S\frac{d^2z + d^2z'}{dt^2}\,dm = S\,R\,dm,$$

la lettre S étant ici un signe intégral, relatif à la molécule dm, et qui doit s'étendre à la masse entière du corps. Les variables x, y, z sont les mêmes pour toutes les molécules; on peut donc les faire sortir hors du signe S; ainsi, en désignant par m la masse du corps, on aura

$$S\frac{d^2x}{dt^2}\,dm = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad S\frac{d^2y}{dt^2}\,dm = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad S\frac{d^2z}{dt^2}\,dm = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On a de plus, par la nature du centre de gravité,

$$S\,x'\,dm = 0, \quad S\,y'\,dm = 0, \quad S\,z'\,dm = 0;$$

partant

$$S\frac{d^2x'}{dt^2}\,dm = 0, \quad S\frac{d^2y'}{dt^2}\,dm = 0, \quad S\frac{d^2z'}{dt^2}\,dm = 0.$$

On aura donc

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = S\,P\,dm, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = S\,Q\,dm, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = S\,R\,dm. \end{cases}$$

Ces trois équations déterminent le mouvement du centre de gravité du corps; elles répondent aux équations du n° 20, relatives au mouvement du centre de gravité d'un système de corps.

On a vu, dans le n° 15, que, pour l'équilibre d'un corps solide, la

somme des forces parallèles à l'axe des x, multipliées respectivement par leurs distances à l'axe des z, moins la somme des forces parallèles à l'axe des y, multipliées par leurs distances à l'axe des z, est égale à zéro; on aura ainsi

$$(1)\quad S\left[(x+x')\frac{d^2y+d^2y'}{dt^2}-(y+y')\frac{d^2x+d^2x'}{dt^2}\right]dm=S[(x+x')Q-(y+y')P]dm.$$

Or on a

$$S(xd^2y-yd^2x)\,dm=m(xd^2y-yd^2x);$$

on a pareillement

$$S(Qx-Py)\,dm=x.SQdm-y.SPdm;$$

enfin on a

$$\begin{aligned}&S(x'd^2y+xd^2y'-y'd^2x-yd^2x')\,dm\\&\quad=d^2y.Sx'dm-d^2x.Sy'dm+x.Sd^2y'dm-y.Sd^2x'dm;\end{aligned}$$

et, par la nature du centre de gravité, chacun des termes du second membre de cette équation est nul; l'équation (1) deviendra donc, en vertu des équations (A),

$$S\frac{x'd^2y'-y'd^2x'}{dt^2}dm=S(Qx'-Py')\,dm;$$

en intégrant cette équation par rapport au temps t, on aura

$$S\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}dm=S\int(Qx'-Py')\,dt\,dm,$$

le signe intégral $\int$ se rapportant au temps t.

De là il est facile de conclure que, si l'on fait

$$\begin{aligned}S\int(Qx'-Py')\,dt\,dm&=N,\\S\int(Rx'-Pz')\,dt\,dm&=N',\\S\int(Ry'-Qz')\,dt\,dm&=N'',\end{aligned}$$

on aura les trois équations suivantes

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &S\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}dm = N,\\ &S\frac{x'dz'-z'dx'}{dt}dm = N',\\ &S\frac{y'dz'-z'dy'}{dt}dm = N''. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations renferment le principe de la conservation des aires; elles suffisent pour déterminer le mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité; réunies aux équations (A), elles déterminent complétement les mouvements de translation et de rotation du corps.

Si le corps est assujetti à tourner autour d'un point fixe, il résulte du n° 15 que les équations (B) suffisent pour cet objet; mais alors il faut fixer à ce point l'origine des coordonnées x', y', z'.

26. Considérons particulièrement ces équations, en supposant cette origine fixe à un point quelconque, différent ou non du centre de gravité. Rapportons la position de chaque molécule à trois axes perpendiculaires entre eux, fixes dans le corps, mais mobiles dans l'espace. Soit θ l'inclinaison du plan formé par les deux premiers axes sur le plan des x et des y; soit φ l'angle formé par la ligne d'intersection de ces deux plans et par le premier axe; enfin, soit ψ l'angle que fait avec l'axe des y la projection du troisième axe sur le plan des x et des y. Nous nommerons *axes principaux* ces trois nouveaux axes, et nous désignerons par x'', y'', z'' les trois coordonnées de la molécule dm, rapportées à ces axes. On aura, par le n° 21,

$$\begin{aligned} x' &= x''(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi)+y''(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi)+z''\sin\theta\sin\psi,\\ y' &= x''(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi)+y''(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)+z''\sin\theta\cos\psi,\\ z' &= z''\cos\theta-y''\sin\theta\cos\varphi-x''\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations, on pourra développer les premiers mem-

bres des équations (B) en fonctions de θ, ψ et φ et de leurs différentielles. Mais on simplifiera considérablement le calcul, en observant que la position des trois axes principaux dépend de trois arbitraires, que l'on peut toujours déterminer de manière à satisfaire aux trois équations

$$\mathrm{S}\,x''y''dm = 0, \quad \mathrm{S}\,x''z''dm = 0, \quad \mathrm{S}\,y''z''dm = 0.$$

Soit alors

$$\mathrm{S}\,(y''^2 + z''^2)\,dm = \mathrm{A}, \quad \mathrm{S}\,(x''^2 + z''^2)\,dm = \mathrm{B}, \quad \mathrm{S}\,(x''^2 + y''^2)\,dm = \mathrm{C},$$

et faisons, pour abréger,

$$d\varphi - d\psi\cos\theta = p\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\sin\varphi - d\theta\cos\varphi = q\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\cos\varphi + d\theta\sin\varphi = r\,dt.$$

Les équations (B) se changeront, après toutes les réductions, dans les trois suivantes

$$(\mathrm{C})\quad\begin{cases} \mathrm{A}q\sin\theta\sin\varphi + \mathrm{B}r\sin\theta\cos\varphi - \mathrm{C}p\cos\theta = -\mathrm{N}, \\ \cos\psi(\mathrm{A}q\cos\theta\sin\varphi + \mathrm{B}r\cos\theta\cos\varphi + \mathrm{C}p\sin\theta) + \sin\psi(\mathrm{B}r\sin\varphi - \mathrm{A}q\cos\varphi) = -\mathrm{N}', \\ \cos\psi(\mathrm{B}r\sin\varphi - \mathrm{A}q\cos\varphi) - \sin\psi(\mathrm{A}q\cos\theta\sin\varphi + \mathrm{B}r\cos\theta\cos\varphi + \mathrm{C}p\sin\theta) = -\mathrm{N}''. \end{cases}$$

Ces trois équations donnent, en les différentiant, et en supposant $\psi = 0$ après les différentiations, ce qui revient à prendre l'axe des x' infiniment près de la ligne d'intersection du plan des x' et des y' avec celui des x'' et des y'',

$$d\theta\cos\theta.(\mathrm{B}r\cos\varphi - \mathrm{A}q\sin\varphi) + \sin\theta.d(\mathrm{B}r\cos\varphi + \mathrm{A}q\sin\varphi) - d(\mathrm{C}p\cos\theta) = -d\mathrm{N},$$
$$d\psi(\mathrm{B}r\sin\varphi - \mathrm{A}q\cos\varphi) - d\theta\sin\theta.(\mathrm{B}r\cos\varphi + \mathrm{A}q\sin\varphi)$$
$$+ \cos\theta.d(\mathrm{B}r\cos\varphi + \mathrm{A}q\sin\varphi) + d(\mathrm{C}p\sin\theta) = -d\mathrm{N}',$$
$$d(\mathrm{B}r\sin\varphi - \mathrm{A}q\cos\varphi) - d\psi\cos\theta.(\mathrm{B}r\cos\varphi + \mathrm{A}q\sin\varphi) - \mathrm{C}p\,d\psi\sin\theta = -d\mathrm{N}''.$$

Si l'on fait

$$\mathrm{C}p = p', \quad \mathrm{A}q = q', \quad \mathrm{B}r = r',$$

ces trois équations différentielles donnent les suivantes

$$(\mathrm{D})\quad\begin{cases} dp' + \dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{AB}}\, q'r'dt = d\mathrm{N}\cos\theta - d\mathrm{N}'\sin\theta, \\ dq' + \dfrac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{\mathrm{CB}}\, r'p'dt = -(d\mathrm{N}\sin\theta + d\mathrm{N}'\cos\theta)\sin\varphi + d\mathrm{N}''\cos\varphi, \\ dr' + \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{AC}}\, p'q'dt = -(d\mathrm{N}\sin\theta + d\mathrm{N}'\cos\theta)\cos\varphi - d\mathrm{N}''\sin\varphi. \end{cases}$$

Ces équations sont très-commodes pour déterminer le mouvement de rotation d'un corps, lorsqu'il tourne à fort peu près autour de l'un des axes principaux, ce qui est le cas des corps célestes.

27. Les trois axes principaux auxquels nous venons de rapporter les angles θ, ψ et φ méritent une attention particulière; nous allons déterminer leur position dans un solide quelconque. Les valeurs de x', y', z' du numéro précédent donnent, par le n° 21, les suivantes

$$x'' = x'(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi) + y'(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi) - z'\sin\theta\sin\varphi,$$
$$y'' = x'(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi) + y'(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) - z'\sin\theta\cos\varphi,$$
$$z'' = x'\sin\theta\sin\psi + y'\sin\theta\cos\psi + z'\cos\theta;$$

d'où l'on tire

$$x''\cos\varphi - y''\sin\varphi = x'\cos\psi - y'\sin\psi,$$
$$x''\sin\varphi + y''\cos\varphi = x'\cos\theta\sin\psi + y'\cos\theta\cos\psi - z'\sin\theta.$$

Soit

$$\mathrm{S}x'^2dm = a^2,\quad \mathrm{S}y'^2dm = b^2,\quad \mathrm{S}z'^2dm = c^2,$$
$$\mathrm{S}x'y'dm = f,\quad \mathrm{S}x'z'dm = g,\quad \mathrm{S}y'z'dm = h;$$

on aura

$$\cos\varphi.\mathrm{S}x''z''dm - \sin\varphi.\mathrm{S}y''z''dm$$
$$= (a^2 - b^2)\sin\theta\sin\psi\cos\psi + f\sin\theta(\cos^2\psi - \sin^2\psi) + \cos\theta(g\cos\psi - h\sin\psi),$$
$$\sin\varphi.\mathrm{S}x''z''dm + \cos\varphi.\mathrm{S}y''z''dm$$
$$= \sin\theta\cos\theta(a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi - c^2 + 2f\sin\psi\cos\psi) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(g\sin\psi + h\cos\psi).$$

En égalant à zéro les seconds membres de ces deux équations, on aura

$$\tang\theta = \frac{h\sin\psi - g\cos\psi}{(a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi + f(\cos^2\psi - \sin^2\psi)},$$

$$\tfrac{1}{2}\tang 2\theta = \frac{g\sin\psi + h\cos\psi}{c^2 - a^2\sin^2\psi - b^2\cos^2\psi - 2f\sin\psi\cos\psi};$$

mais on a

$$\tfrac{1}{2}\tang 2\theta = \frac{\tang\theta}{1 - \tang^2\theta};$$

en égalant ces deux valeurs de $\frac{1}{2}\tang 2\theta$, et en substituant dans la dernière, au lieu de $\tang\theta$, sa valeur précédente en ψ; en faisant ensuite, pour abréger, $\tang\psi = u$, on trouvera, après toutes les réductions, l'équation suivante du troisième degré

$$0 = (gu + h)(hu - g)^2 + [(a^2 - b^2)u + f(1 - u^2)][(hc^2 - ha^2 + fg)u + gb^2 - gc^2 - hf].$$

Cette équation ayant au moins une racine réelle, on voit qu'il est toujours possible de rendre nulles à la fois les deux quantités

$$\cos\varphi . Sx''z''dm - \sin\varphi . Sy''z''dm,$$
$$\sin\varphi . Sx''z''dm + \cos\varphi . Sy''z''dm,$$

et par conséquent la somme de leurs carrés $(Sx''z''dm)^2 + (Sy''z''dm)^2$, ce qui exige que l'on ait séparément

$$Sx''z''dm = 0, \quad Sy''z''dm = 0.$$

La valeur de u donne celle de l'angle ψ, et par conséquent celle de $\tang\theta$ et de l'angle θ. Il reste maintenant à déterminer l'angle φ, ce que l'on fera au moyen de la condition $Sx''y''dm = 0$, qui reste à remplir. Pour cela, nous observerons que, si l'on substitue dans $Sx''y''dm$, au lieu de x'', y'', leurs valeurs précédentes, cette fonction deviendra de cette forme

$$H\sin 2\varphi + L\cos 2\varphi,$$

H et L étant fonctions des angles θ et ψ et des constantes a^2, b^2, c^2, f,

g, h; en égalant cette expression à zéro, on aura

$$\tang 2\varphi = \frac{-L}{H}.$$

Les trois axes déterminés au moyen des valeurs précédentes de θ, ψ et φ satisfont aux trois équations

$$S x''y''dm = 0, \quad S x''z''dm = 0, \quad S y''z''dm = 0.$$

L'équation du troisième degré en u semble indiquer trois systèmes d'axes principaux semblables au précédent; mais on doit observer que u est la tangente de l'angle formé par l'axe des x' et par l'intersection du plan des x' et des y' avec celui des x'' et des y''; or il est clair que l'on peut changer les uns dans les autres les trois axes des x'', des y'' et des z'', puisque les trois équations précédentes seront toujours satisfaites; l'équation en u doit donc également déterminer la tangente de l'angle formé par l'axe des x' et par l'intersection du plan des x' et des y', soit avec le plan des x'' et des y'', soit avec le plan des x'' et des z'', soit enfin avec le plan des y'' et des z''. Ainsi les trois racines de l'équation en u sont réelles, et elles appartiennent à un même système d'axes.

Il suit de là que généralement un solide n'a qu'un seul système d'axes qui jouissent de la propriété dont il s'agit. Ces axes ont été nommés *axes principaux de rotation*, à cause d'une propriété qui leur est particulière, et dont nous parlerons dans la suite.

On nomme *moment d'inertie* d'un corps, relativement à un axe quelconque, la somme des produits de chaque molécule du corps par le carré de sa distance à cet axe. Ainsi les quantités A, B, C sont les moments d'inertie du solide que nous venons de considérer par rapport aux axes des x'', des y'' et des z''. Nommons présentement C′ le moment d'inertie du même solide par rapport à l'axe des z'; on trouvera, au moyen des valeurs de x' et de y' du numéro précédent,

$$C' = A \sin^2\theta \sin^2\varphi + B \sin^2\theta \cos^2\varphi + C \cos^2\theta.$$

Les quantités $\sin^2\theta\sin^2\varphi$, $\sin^2\theta\cos^2\varphi$ et $\cos^2\theta$ sont les carrés des cosinus des angles que font les axes des x'', des y'' et des z'' avec l'axe des z'; d'où il suit en général que, si l'on multiplie le moment d'inertie relatif à chaque axe principal de rotation par le carré du cosinus de l'angle qu'il fait avec un axe quelconque, la somme de ces trois produits sera le moment d'inertie du solide relativement à ce dernier axe.

La quantité C′ est moindre que la plus grande des trois quantités A, B, C; elle est plus grande que la plus petite de ces trois quantités; le plus grand et le plus petit moment d'inertie appartiennent donc aux axes principaux.

Soient X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité du solide, par rapport à l'origine des coordonnées, que nous fixons au point autour duquel le corps est assujetti à tourner, s'il n'est pas libre; $x'-X$, $y'-Y$ et $z'-Z$ seront les coordonnées de la molécule dm du corps, relativement à son centre de gravité; le moment d'inertie, relatif à un axe parallèle à l'axe des z' et passant par le centre de gravité, sera donc

$$S[(x'-X)^2+(y'-Y)^2]dm;$$

or on a, par la nature du centre de gravité,

$$Sx'dm=mX,\quad Sy'dm=mY;$$

le moment précédent se réduit donc à

$$-m(X^2+Y^2)+S(x'^2+y'^2)dm.$$

On aura ainsi les moments d'inertie du solide, relativement aux axes qui passent par un point quelconque, lorsque ces moments seront connus par rapport aux axes qui passent par le centre de gravité. On voit en même temps que le plus petit de tous les moments d'inertie a lieu par rapport à l'un des trois axes principaux qui passent par ce centre.

Supposons que, par la nature du corps, les deux moments d'inertie A et B soient égaux; on aura

$$C'=A\sin^2\theta+C\cos^2\theta;$$

en faisant donc θ égal à l'angle droit, ce qui rend l'axe des z' perpendiculaire à celui des z'', on aura $C' = A$. Les moments d'inertie relatifs à tous les axes situés dans le plan perpendiculaire à l'axe des z'' sont donc alors égaux entre eux. Mais il est facile de s'assurer que l'on a dans ce cas, pour le système de l'axe des z'' et de deux axes quelconques perpendiculaires entre eux et à cet axe,

$$Sx'y'dm = 0, \quad Sx'z''dm = 0, \quad Sy'z''dm = 0;$$

car, en désignant par x'' et y'' les coordonnées d'une molécule dm du corps, rapportées aux deux axes principaux, pris dans le plan perpendiculaire à l'axe des z'', et par rapport auxquels les moments d'inertie sont supposés égaux, nous aurons

$$S(x''^2 + z''^2)\,dm = S(y''^2 + z''^2)\,dm,$$

ou simplement

$$Sx''^2\,dm = Sy''^2\,dm;$$

mais, en nommant ε l'angle que l'axe des x' fait avec l'axe des x'', on a

$$x' = x''\cos\varepsilon + y''\sin\varepsilon,$$
$$y' = y''\cos\varepsilon - x''\sin\varepsilon;$$

on a donc

$$Sx'y'dm = Sx''y''dm.(\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon) + S(y''^2 - x''^2)\,dm.\sin\varepsilon\cos\varepsilon = 0.$$

On trouvera semblablement

$$Sx'z''dm = 0, \quad Sy'z''dm = 0;$$

tous les axes perpendiculaires à celui des z'' sont donc alors des axes principaux, et, dans ce cas, le solide a une infinité d'axes semblables.

Si l'on a à la fois $A = B = C$, on aura généralement $C' = A$, c'est-à-dire que tous les moments d'inertie du solide sont égaux; mais alors on a généralement

$$Sx'y'dm = 0, \quad Sx'z'dm = 0, \quad Sy'z'dm = 0,$$

quelle que soit la position du plan des x' et des y', en sorte que tous

les axes sont des axes principaux. C'est le cas de la sphère : nous verrons dans la suite que cette propriété convient à une infinité d'autres solides dont nous donnerons l'équation générale.

28. Les quantités p, q, r, que nous avons introduites dans les équations (C) du n° 26, ont cela de remarquable, qu'elles déterminent la position de l'axe réel et instantané de rotation du corps, par rapport aux axes principaux. En effet, on a, relativement aux points situés dans l'axe de rotation,

$$dx' = 0, \quad dy' = 0, \quad dz' = 0.$$

En différentiant les valeurs de x', y', z' du n° 26, et en faisant $\sin\psi = 0$ après les différentiations, ce qui est permis, puisque l'on peut fixer à volonté la position de l'axe des x' sur le plan des x' et des y', on aura.

$$dx' = x''(d\psi\cos\theta\sin\varphi - d\varphi\sin\varphi) + y''(d\psi\cos\theta\cos\varphi - d\varphi\cos\varphi) + z''d\psi\sin\theta = 0,$$

$$dy' = x''(d\varphi\cos\theta\cos\varphi - d\theta\sin\theta\sin\varphi - d\psi\cos\varphi) + y''(d\psi\sin\varphi - d\varphi\cos\theta\sin\varphi - d\theta\sin\theta\cos\varphi) + z''d\theta\cos\theta = 0,$$

$$dz' = -x''(d\theta\cos\theta\sin\varphi + d\varphi\sin\theta\cos\varphi) - y''(d\theta\cos\theta\cos\varphi - d\varphi\sin\theta\sin\varphi) - z''d\theta\sin\theta = 0.$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par $-\sin\varphi$, la seconde par $\cos\theta\cos\varphi$, et la troisième par $-\sin\theta\cos\varphi$, on aura, en les ajoutant,

$$0 = px'' - qz''.$$

Si l'on multiplie la première des mêmes équations par $\cos\varphi$, la seconde par $\cos\theta\sin\varphi$, et la troisième par $-\sin\theta\sin\varphi$, on aura, en les ajoutant,

$$0 = py'' - rz''.$$

Enfin, si l'on multiplie la seconde des mêmes équations par $\sin\theta$, et la troisième par $\cos\theta$, on aura, en les ajoutant,

$$0 = qy'' - rx''.$$

Cette dernière équation résulte évidemment des deux précédentes; ainsi les trois équations $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$ se réduisent à ces deux

équations, qui sont à une ligne droite formant avec les axes des x'', des y'' et des z'' des angles dont les cosinus sont

$$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Cette droite est donc en repos, et forme l'axe réel de rotation du corps.

Pour avoir la vitesse de rotation du corps, considérons le point de l'axe des z'' éloigné de l'origine des coordonnées d'une distance égale à l'unité. On aura ses vitesses parallèlement aux axes des x', des y' et des z' en faisant $x''=0$, $y''=0$, $z''=1$ dans les expressions précédentes de dx', dy', dz', et en les divisant par dt, ce qui donne, pour ces vitesses partielles,

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{dt}\cos\theta, \quad \frac{-d\theta}{dt}\sin\theta;$$

la vitesse entière du point dont il s'agit est donc $\frac{\sqrt{d\theta^2+d\psi^2\sin^2\theta}}{dt}$, ou $\sqrt{q^2+r^2}$. En divisant cette vitesse par la distance du point à l'axe instantané de rotation, on aura la vitesse angulaire de rotation du corps; or cette distance est évidemment égale au sinus de l'angle que l'axe réel de rotation fait avec l'axe des z'', angle dont le cosinus est $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$; on aura donc $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ pour la vitesse angulaire de rotation.

On voit par là que, quel que soit le mouvement de rotation d'un corps autour d'un point fixe ou considéré comme tel, ce mouvement ne peut être qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe pendant un instant, mais qui peut varier d'un instant à l'autre. La position de cet axe par rapport aux trois axes principaux et la vitesse angulaire de rotation dépendent des variables p, q, r, dont la détermination est très-importante dans ces recherches, et qui, exprimant des quantités indépendantes de la situation du plan des x' et des y', sont ellesmêmes indépendantes de cette situation.

29. Déterminons ces variables en fonction du temps t, dans le cas où le corps n'est sollicité par aucune force extérieure. Pour cela, reprenons les équations (D) du n° 26 entre les variables p', q', r', qui sont aux précédentes dans un rapport constant. Les différentielles $d\mathrm{N}$, $d\mathrm{N}'$ et $d\mathrm{N}''$ sont alors nulles, et ces équations donnent, en les ajoutant ensemble, après les avoir multipliées respectivement par p', q' et r',

$$0 = p'dp' + q'dq' + r'dr',$$

et, en intégrant,

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = k^2,$$

k étant une constante arbitraire.

Les équations (D), multipliées respectivement par $\mathrm{AB}p'$, $\mathrm{BC}q'$ et $\mathrm{AC}r'$, et ensuite ajoutées, donnent, en intégrant leur somme,

$$\mathrm{AB}p'^2 + \mathrm{BC}q'^2 + \mathrm{AC}r'^2 = \mathrm{H}^2,$$

H étant une constante arbitraire : cette équation renferme le principe de la conservation des forces vives. On tirera de ces deux intégrales

$$q'^2 = \frac{\mathrm{AC}k^2 - \mathrm{H}^2 + \mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{C})p'^2}{\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})},$$

$$r'^2 = \frac{\mathrm{H}^2 - \mathrm{BC}k^2 - \mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{C})p'^2}{\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{B})};$$

ainsi l'on connaîtra q' et r' en fonction du temps t, lorsque p' sera déterminé. Or la première des équations (D) donne

$$dt = \frac{\mathrm{AB}\,dp'}{(\mathrm{A}-\mathrm{B})q'r'},$$

partant

$$dt = \frac{\mathrm{ABC}\,dp'}{\sqrt{[\mathrm{AC}k^2 - \mathrm{H}^2 + \mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{C})p'^2][\mathrm{H}^2 - \mathrm{BC}k^2 - \mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{C})p'^2]}},$$

équation qui n'est intégrable que dans l'un des trois cas suivants, $\mathrm{B} = \mathrm{A}$, $\mathrm{B} = \mathrm{C}$, $\mathrm{A} = \mathrm{C}$.

La détermination des trois quantités p', q', r' renferme trois arbitraires H^2, k^2, et celle qu'introduit l'intégration de l'équation différen-

tielle précédente. Mais ces quantités ne donnent que la position de l'axe instantané de rotation du corps sur sa surface ou relativement aux trois axes principaux, et sa vitesse angulaire de rotation. Pour avoir le mouvement réel du corps autour du point fixe, il faut connaître encore la position des axes principaux dans l'espace, ce qui doit introduire trois nouvelles arbitraires relatives à la position primitive de ces axes, et ce qui exige trois nouvelles intégrales, qui, jointes aux précédentes, donnent la solution complète du problème. Les équations (C) du n° 26 renferment trois arbitraires N, N', N''; mais elles ne sont pas entièrement distinctes des arbitraires H et k. En effet, si l'on ajoute ensemble les carrés des premiers membres des équations (C), on a

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = N^2 + N'^2 + N''^2,$$

ce qui donne

$$k^2 = N^2 + N'^2 + N''^2.$$

Les constantes N, N', N'' répondent aux constantes c, c', c'' du n° 21, et la fonction $\frac{1}{2}t\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$ exprime la somme des aires décrites pendant le temps t par les projections de chaque molécule du corps sur le plan relativement auquel cette somme est un maximum. N' et N'' sont nuls relativement à ce plan; en égalant donc à zéro leurs valeurs trouvées dans le n° 26, on aura

$$o = Br\sin\varphi - Aq\cos\varphi,$$

$$o = Aq\cos\theta\sin\varphi + Br\cos\theta\cos\varphi + Cp\sin\theta,$$

d'où l'on tire

$$\cos\theta = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{-q'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{-r'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}.$$

Au moyen de ces équations, on connaîtra les valeurs de θ et de φ en fonction du temps, relativement au plan fixe que nous venons de consi-

dérer. Il ne s'agit plus que de connaître l'angle ψ, que l'intersection de ce plan et de celui des deux premiers axes principaux fait avec l'axe des x', ce qui exige une nouvelle intégration.

Les valeurs de q et de r du n° 26 donnent

$$d\psi \sin^2\theta = q\,dt \sin\theta \sin\varphi + r\,dt \sin\theta \cos\varphi,$$

d'où l'on tire

$$d\psi = \frac{-k\,dt(Bq'^2 + Ar'^2)}{AB(q'^2 + r'^2)};$$

or on a, par ce qui précède,

$$q'^2 + r'^2 = k^2 - p'^2, \quad Bq'^2 + Ar'^2 = \frac{H^2 - ABp'^2}{C};$$

on aura donc

$$d\psi = \frac{-k\,dt(H^2 - ABp'^2)}{ABC(k^2 - p'^2)}.$$

Si l'on substitue, au lieu de dt, sa valeur trouvée ci-dessus, on aura la valeur de ψ en fonction de p'; les trois angles θ, φ et ψ seront ainsi déterminés en fonction des variables p', q', r', qui seront elles-mêmes déterminées en fonction du temps t. On connaîtra donc à un instant quelconque les valeurs de ces angles par rapport au plan des x' et des y' que nous venons de considérer, et il sera facile, par les formules de la Trigonométrie sphérique, d'en conclure les valeurs des mêmes angles relatives à tout autre plan; ce qui introduira deux nouvelles arbitraires qui, réunies aux quatre précédentes, formeront les six arbitraires que doit renfermer la solution complète du problème que nous venons de traiter. Mais on voit que la considération du plan dont nous venons de parler simplifie ce problème.

La position des trois axes principaux étant supposée connue sur la surface du corps, si l'on connait à un instant quelconque la position de l'axe réel de rotation à cette surface et la vitesse angulaire de rotation, on aura à cet instant les valeurs de p, q, r, puisque ces valeurs, divisées par la vitesse angulaire de rotation, expriment les cosinus des angles que l'axe réel de rotation forme avec les trois axes principaux;

on aura donc les valeurs de p', q', r'; or ces dernières valeurs sont proportionnelles aux sinus des angles que les trois axes principaux forment avec le plan des x' et des y', relativement auquel la somme des aires des projections des molécules du corps, multipliées respectivement par ces molécules, est un maximum; on pourra donc alors déterminer à tous les instants l'intersection de la surface du corps par ce plan invariable, et par conséquent retrouver la position de ce plan par les conditions actuelles du mouvement du corps.

Supposons que le mouvement de rotation du corps soit dû à une impulsion primitive qui ne passe point par son centre de gravité. Il résulte, de ce que nous avons démontré dans les nos 20 et 22, que le centre de gravité prendra le même mouvement que si cette impulsion lui était immédiatement appliquée, et que le corps prendra autour de ce centre le même mouvement de rotation que si ce centre était immobile. La somme des aires décrites autour de ce point par le rayon vecteur de chaque molécule projetée sur un plan fixe, et multipliées respectivement par ces molécules, sera proportionnelle au moment de la force primitive projetée sur le même plan; or ce moment est le plus grand relativement au plan qui passe par sa direction et par le centre de gravité; ce plan est donc le plan invariable. Si l'on nomme f la distance de l'impulsion primitive au centre de gravité, et v la vitesse qu'elle imprime à ce point, m étant la masse du corps, mfv sera le moment de cette impulsion, et, en le multipliant par $\frac{1}{2}t$, le produit sera égal à la somme des aires décrites pendant le temps t; mais cette somme, par ce qui précède, est $\frac{t}{2}\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$; on a donc

$$\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}=mfv.$$

Si l'on connaît à l'origine du mouvement la position des axes principaux relativement au plan invariable, ou les angles θ et φ, on aura à cette origine les valeurs de p', q' et r', et par conséquent celles de p, q, r; on aura donc à un instant quelconque les valeurs des mêmes quantités.

Cette théorie peut servir à expliquer le double mouvement de rotation et de révolution des planètes par une seule impulsion primitive. Supposons, en effet, qu'une planète soit une sphère homogène d'un rayon R, et qu'elle tourne autour du Soleil avec une vitesse angulaire U; r étant supposé exprimer sa distance au Soleil, on aura $v = r\text{U}$; de plus, si l'on conçoit que la planète se meut en vertu d'une impulsion primitive dont la direction a passé à la distance f de son centre, il est clair qu'elle tournera sur elle-même, autour d'un axe perpendiculaire au plan invariable; en considérant donc cet axe comme le troisième axe principal, on aura $\theta = 0$, et par conséquent $q' = 0$, $r' = 0$; on aura donc $p' = mfv$, ou $\text{C}p = mfr\text{U}$. Mais dans la sphère on a $\text{C} = \frac{2}{5}m\text{R}^2$, partant

$$f = \frac{2}{5}\frac{\text{R}^2}{r}\frac{p}{\text{U}},$$

ce qui donne la distance f de la direction de l'impulsion primitive, au centre de la planète, qui satisfait au rapport observé entre la vitesse angulaire p de rotation et la vitesse angulaire U de révolution autour du Soleil. Relativement à la Terre, on a $\frac{p}{\text{U}} = 366,25638$; la parallaxe du Soleil donne $\frac{\text{R}}{r} = 0,000042665$, et par conséquent $f = \frac{1}{160}\text{R}$, à fort peu près.

Les planètes n'étant point homogènes, on peut les considérer ici comme étant formées de couches sphériques et concentriques, d'inégale densité. Soit ρ la densité d'une de ces couches dont le rayon est R, ρ étant fonction de R; on aura

$$\text{C} = \frac{2m}{3}\cdot\frac{\int\rho\text{R}^4 d\text{R}}{\int\rho\text{R}^2 d\text{R}},$$

m étant la masse entière de la planète, et les intégrales étant prises depuis $\text{R} = 0$ jusqu'à sa valeur à la surface; on aura ainsi

$$f = \frac{2}{3}\frac{p}{r\text{U}}\cdot\frac{\int\rho\text{R}^4 d\text{R}}{\int\rho\text{R}^2 d\text{R}}.$$

Si, comme il est naturel de le supposer, les couches les plus voisines du

centre sont les plus denses, la fonction $\frac{\int\rho R^4 dR}{\int\rho R^2 dR}$ sera moindre que $\frac{3}{5}R^2$; la valeur de f sera donc moindre que dans le cas de l'homogénéité.

30. Déterminons présentement les oscillations du corps, dans le cas où il tourne à très-peu près autour du troisième axe principal. On pourrait les déduire des intégrales auxquelles nous sommes parvenus dans le numéro précédent; mais il est plus simple de les tirer directement des équations différentielles (D) du n° **26**. Le corps n'étant sollicité par aucune force, ces équations deviennent, en y substituant au lieu de p', q', r' leurs valeurs Cp, Aq et Br,

$$dp + \frac{B-A}{C}\,qr\,dt = 0, \quad dq + \frac{C-B}{A}\,rp\,dt = 0, \quad dr + \frac{A-C}{B}\,pq\,dt = 0.$$

Le solide étant supposé tourner à fort peu près autour de son troisième axe principal, q et r sont de très-petites quantités, dont nous négligerons les carrés et les produits; ce qui donne $dp = 0$, et par conséquent p constant. Si dans les deux autres équations on suppose

$$q = M\sin(nt+\gamma), \quad r = M'\cos(nt+\gamma),$$

on aura

$$n = p\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}, \quad M' = -M\sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}},$$

M et γ étant deux constantes arbitraires. La vitesse angulaire de rotation sera $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ou simplement p, en négligeant les carrés de q et de r; cette vitesse sera donc à très-peu près constante. Enfin le sinus de l'angle formé par l'axe réel de rotation et par le troisième axe principal sera $\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{p}$.

Si à l'origine du mouvement on a $q = 0$ et $r = 0$, c'est-à-dire si l'axe réel de rotation coïncide à cet instant avec le troisième axe principal, on aura $M = 0$, $M' = 0$; q et r seront donc toujours nuls, et l'axe de rotation coïncidera toujours avec le troisième axe principal; d'où il suit que, si le corps commence à tourner autour d'un des axes principaux,

il continuera de tourner uniformément autour du même axe. Cette propriété remarquable des axes principaux les a fait nommer *axes principaux de rotation :* elle leur convient exclusivement; car, si l'axe réel de rotation est invariable à la surface du corps, on a $dp = 0$, $dq = 0$, $dr = 0$; les valeurs précédentes de ces quantités donnent ainsi

$$\frac{B-A}{C}rq = 0, \quad \frac{C-B}{A}rp = 0, \quad \frac{A-C}{B}pq = 0.$$

Dans le cas général où A, B, C sont inégaux, deux des trois quantités p, q, r sont nulles en vertu de ces équations, ce qui suppose que l'axe réel de rotation coïncide avec l'un des axes principaux.

Si deux des trois quantités A, B, C sont égales, par exemple si l'on a $A = B$, les trois équations précédentes se réduisent à celles-ci

$$rp = 0, \quad pq = 0,$$

et l'on peut y satisfaire par la supposition seule de p égal à zéro. L'axe de rotation est alors dans un plan perpendiculaire au troisième axe principal; mais on a vu (n° 27) que tous les axes situés dans ce plan sont des axes principaux.

Enfin, si l'on a à la fois $A = B = C$, les trois équations précédentes seront satisfaites, quels que soient p, q, r; mais alors, par le n° 27, tous les axes du corps sont des axes principaux.

Il suit de là que les seuls axes principaux ont la propriété d'être des axes invariables de rotation; mais ils n'en jouissent pas tous de la même manière. Le mouvement de rotation autour de celui dont le moment d'inertie est entre les moments d'inertie des deux autres axes peut être troublé d'une manière sensible par la cause la plus légère, en sorte qu'il n'y a point de stabilité dans ce mouvement.

On nomme *état stable* d'un système de corps un état tel que le système, lorsqu'il en est infiniment peu dérangé, ne puisse s'en écarter qu'infiniment peu, en faisant des oscillations continuelles autour de cet état. Concevons, cela posé, que l'axe réel de rotation s'éloigne infiniment peu du troisième axe principal; dans ce cas, les constantes M

et M′ sont infiniment petites; et, si n est une quantité réelle, les valeurs de q et de r resteront toujours infiniment petites, et l'axe réel de rotation ne fera jamais que des excursions du même ordre autour du troisième axe principal. Mais, si n était imaginaire, $\sin(nt+\gamma)$ et $\cos(nt+\gamma)$ se changeraient en exponentielles; les expressions de q et de r pourraient donc alors augmenter indéfiniment, et cesser enfin d'être infiniment petites; il n'y aurait donc point de stabilité dans le mouvement de rotation du corps autour du troisième axe principal. La valeur de n est réelle, si C est la plus grande ou la plus petite des trois quantités A, B, C; car alors le produit $(C-A)(C-B)$ est positif; mais ce produit est négatif, si C est entre A et B, et dans ce cas n est imaginaire; ainsi le mouvement de rotation est stable autour des deux axes principaux dont les moments d'inertie sont le plus grand et le plus petit; il ne l'est pas autour de l'autre axe principal.

Maintenant, pour déterminer la position des axes principaux dans l'espace, nous supposerons le troisième axe principal à fort peu près perpendiculaire au plan des x' et des y', en sorte que θ soit une quantité très-petite dont nous négligerons le carré. Nous aurons, par le n° 26,

$$d\varphi - d\psi = p\,dt,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\psi = \varphi - pt - \varepsilon,$$

ε étant une constante arbitraire. Si l'on fait ensuite

$$\sin\theta\sin\varphi = s,\quad \sin\theta\cos\varphi = u,$$

les valeurs de q et de r du n° 26 donneront, en éliminant $d\psi$,

$$\frac{ds}{dt} - pu = r,\quad \frac{du}{dt} + ps = -q,$$

et en intégrant,

$$s = \beta\sin(pt+\lambda) - \frac{\text{AM}}{\text{C}p}\sin(nt+\gamma),$$

$$u = \beta\cos(pt+\lambda) - \frac{\text{BM}'}{\text{C}p}\cos(nt+\gamma),$$

ϵ et λ étant deux nouvelles arbitraires : le problème est ainsi complétement résolu, puisque les valeurs de s et de u donnent les angles θ et φ en fonction du temps, et que ψ est déterminé en fonction de φ et de t. Si ϵ est nul, le plan des x' et des y' devient le plan invariable auquel nous avons rapporté, dans le numéro précédent, les angles θ, φ et ψ.

31. Si le solide est libre, l'analyse des numéros précédents donnera son mouvement autour de son centre de gravité; si le solide est forcé de se mouvoir autour d'un point fixe, elle fera connaître son mouvement autour de ce point. Il nous reste à considérer le mouvement d'un solide assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe.

Concevons que x' soit cet axe, que nous supposerons horizontal : dans ce cas, la dernière des équations (B) du n° 25 suffira pour déterminer le mouvement du corps. Supposons, de plus, que l'axe des y' soit horizontal, et qu'ainsi l'axe des z' soit vertical et dirigé vers le centre de la Terre; supposons enfin que le plan qui passe par les axes des y' et des z' passe par le centre de gravité du corps, et imaginons un axe passant constamment par ce centre et par l'origine des coordonnées. Soit θ l'angle que ce nouvel axe fait avec celui des z'; si l'on nomme y'' et z'' les coordonnées rapportées à ce nouvel axe, on aura

$$y' = y''\cos\theta + z''\sin\theta, \quad z' = z''\cos\theta - y''\sin\theta,$$

d'où l'on tire

$$S\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}dm = -\frac{d\theta}{dt}\cdot S\,dm(y''^2 + z''^2).$$

$S\,dm(y''^2 + z''^2)$ est le moment d'inertie du corps relativement à l'axe des x' : soit C ce moment. La dernière des équations (B) du n° 25 donnera

$$-C\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dN''}{dt}.$$

Supposons que le corps ne soit sollicité que par l'action de la pesan-

teur; les valeurs de P et de Q du n° 25 seront nulles, et R sera constant, ce qui donne

$$\frac{dN''}{dt} = \mathrm{S}\,\mathrm{R}y'dm = \mathrm{R}\cos\theta.\mathrm{S}y''dm + \mathrm{R}\sin\theta.\mathrm{S}z''dm.$$

L'axe des z'' passant par le centre de gravité du corps, on a $\mathrm{S}y''dm = 0$; de plus, si l'on nomme h la distance du centre de gravité du corps à l'axe de x', on aura $\mathrm{S}z''dm = mh$, m étant la masse entière du corps; on aura donc

$$\frac{dN''}{dt} = mh\mathrm{R}\sin\theta,$$

et par conséquent

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-mh\mathrm{R}\sin\theta}{\mathrm{C}}.$$

Considérons présentement un second corps, dont toutes les parties soient réunies dans un seul point, éloigné de la distance l de l'axe des x'; on aura, relativement à ce corps, $\mathrm{C} = m'l^2$, m' étant sa masse; de plus, h sera égal à l; partant

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-\mathrm{R}}{l}\sin\theta.$$

Ces deux corps auront donc exactement le même mouvement d'oscillation, si leur vitesse initiale angulaire, lorsque leurs centres de gravité sont dans la verticale, est la même, et si l'on a $l = \frac{\mathrm{C}}{mh}$. Le second corps dont nous venons de parler est le pendule simple dont on a considéré les oscillations dans le n° 11; on peut donc toujours assigner, par cette formule, la longueur l du pendule simple dont les oscillations sont isochrones à celles du solide que nous considérons ici, et qui forme un pendule composé. C'est ainsi que l'on a déterminé la longueur du pendule simple qui bat les secondes, par des observations faites sur les pendules composés.

CHAPITRE VIII.

DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

32. Nous ferons dépendre les lois du mouvement des fluides de celles de leur équilibre, de même que, dans le Chapitre V, nous avons déduit les lois du mouvement d'un système de corps de celles de l'équilibre de ce système. Reprenons donc l'équation générale de l'équilibre des fluides, donnée dans le n° 17,

$$\partial p = \rho(P\partial x + Q\partial y + R\partial z),$$

la caractéristique δ ne se rapportant qu'aux coordonnées x, y, z de la molécule, et n'étant point relative au temps t. Lorsque le fluide est en mouvement, les forces en vertu desquelles ses molécules seraient en équilibre sont, par le n° 18, en supposant dt constant,

$$P - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad Q - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad R - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2};$$

il faut donc substituer ces forces, au lieu de P, Q, R, dans l'équation précédente de l'équilibre. En désignant par δV la variation $P\delta x + Q\delta y + R\delta z$, que nous supposerons exacte, on aura

$$(F)\qquad \partial V - \frac{\partial p}{\rho} = \partial x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \partial y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \partial z\frac{\partial^2 z}{\partial t^2};$$

cette équation équivaut à trois équations distinctes, puisque, les variations δx, δy, δz étant indépendantes, on peut égaler séparément à zéro leurs coefficients.

Les coordonnées x, y, z sont fonctions des coordonnées primitives et du temps t; soient a, b, c ces coordonnées primitives; on aura

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial a}\delta a + \frac{\partial x}{\partial b}\delta b + \frac{\partial x}{\partial c}\delta c,$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial a}\delta a + \frac{\partial y}{\partial b}\delta b + \frac{\partial y}{\partial c}\delta c,$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial a}\delta a + \frac{\partial z}{\partial b}\delta b + \frac{\partial z}{\partial c}\delta c.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (F), on pourra égaler séparément à zéro les coefficients de δa, δb, δc, ce qui donnera trois équations à différences partielles entre les trois coordonnées x, y, z de la molécule, ses coordonnées primitives a, b, c, et le temps t.

Il nous reste à remplir les conditions de la continuité du fluide. Pour cela, considérons à l'origine du mouvement un parallélépipède fluide rectangle, dont les trois dimensions soient da, db, dc. En désignant par (ρ) la densité primitive de cette molécule, sa masse sera $(\rho)\,da\,db\,dc$. Nommons (A) ce parallélépipède : il est aisé de voir qu'après le temps t il se changera dans un parallélépipède obliquangle; car toutes les molécules situées primitivement sur une face quelconque du parallélépipède (A) seront encore dans un même plan, du moins en négligeant les infiniment petits du second ordre : toutes les molécules situées sur les arêtes parallèles de (A) se trouveront sur de petites droites égales et parallèles entre elles. Nommons (B) ce nouveau parallélépipède, et concevons que par les extrémités de l'arête formée par les molécules qui, dans le parallélépipède (A), composaient l'arête dc, on mène deux plans parallèles à celui des x et des y. En prolongeant les arêtes de (B) jusqu'à la rencontre de ces deux plans, on aura un nouveau parallélépipède (C), compris entre eux et égal à (B); car il est clair qu'autant l'un des deux plans retranche du parallélépipède (B), autant l'autre lui ajoute. Le parallélépipède (C) aura ses deux bases parallèles au plan des x et des y : sa hauteur comprise entre ses bases sera évidemment

égale à la différence de z, prise en n'y faisant varier que c; ce qui donne $\frac{\partial z}{\partial c}\,dc$ pour cette hauteur.

On aura sa base, en observant qu'elle est égale à la section de (B) par un plan parallèle à celui des x et des y; nommons (ε) cette section. Par rapport aux molécules dont elle sera formée, la valeur de z sera la même, et l'on aura

$$0 = \frac{\partial z}{\partial a}\,da + \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc.$$

Soient δp et δq deux côtés contigus de la section (ε), dont le premier soit formé par des molécules de la face $db\,dc$ du parallélépipède (A), et dont le second soit formé par des molécules de sa face $da\,dc$. Si par les extrémités du côté δp on imagine deux droites parallèles à l'axe des x, et que l'on prolonge le côté du parallélogramme (ε), parallèle à δp, jusqu'à la rencontre de ces droites, elles intercepteront entre elles un nouveau parallélogramme (λ) égal à (ε), et dont la base sera parallèle à l'axe des x. Le côté δp étant formé par des molécules de la face $db\,dc$, relativement auxquelles la valeur de z est la même, il est aisé de voir que la hauteur du parallélogramme (λ) est la différence de y, en supposant a, z et t constants, ce qui donne

$$dy = \frac{\partial y}{\partial b}\,db + \frac{\partial y}{\partial c}\,dc,$$

$$0 = \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc,$$

d'où l'on tire

$$dy = \frac{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}}{\frac{\partial z}{\partial c}}\,db;$$

c'est l'expression de la hauteur du parallélogramme (λ). Sa base est égale à la section de ce parallélogramme par un plan parallèle à l'axe des x; cette section est formée par des molécules du parallélépipède (A) par rapport auxquelles z et y sont constants; sa longueur est

donc égale à la différentielle de x, prise en supposant z, y et t constants, ce qui donne les trois équations

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc,$$

$$o = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc,$$

$$o = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc.$$

Soit, pour abréger,

$$6 = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a};$$

on aura

$$dx = \frac{6\,da}{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}};$$

c'est l'expression de la base du parallélogramme (λ); la surface de ce parallélogramme sera donc $\frac{6\,da\,db}{\frac{\partial z}{\partial c}}$. Cette quantité exprime encore la surface du parallélogramme (t); en la multipliant par $\frac{\partial z}{\partial c}dc$, on aura $6\,da\,db\,dc$ pour le volume des parallélépipèdes (C) et (B). Soit ρ la densité du parallélépipède (A) après le temps t; on aura $\rho 6\,da\,db\,dc$ pour sa masse; en l'égalant à sa masse primitive $(\rho)\,da\,db\,dc$, on aura

$$\text{(G)} \qquad \rho 6 = (\rho),$$

pour l'équation relative à la continuité du fluide.

33. On peut donner aux équations (F) et (G) une autre forme d'un usage plus commode dans quelques circonstances. Soient u, v et w les vitesses d'une molécule fluide, parallèlement aux axes des x, des y et des z; on aura

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w.$$

Différentions ces équations, en regardant u, v et w comme fonctions des coordonnées x, y, z de la molécule, et du temps t; nous aurons

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

L'équation (F) du numéro précédent deviendra ainsi

$$(\text{H}) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta V - \frac{\delta p}{\rho} = {} & \delta x\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ & + \delta y\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ & + \delta z\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Pour avoir l'équation relative à la continuité du fluide, concevons que, dans la valeur de β du numéro précédent, a, b, c soient égaux à x, y, z, et que x, y, z soient égaux à $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$, ce qui revient à prendre les coordonnées primitives a, b, c infiniment près de x, y, z; on aura

$$\beta = 1 + dt\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

l'équation (G) devient

$$\rho\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho - (\rho) = 0.$$

Si l'on considère ρ comme fonction de x, y, z et de t, on a

$$(\rho) = \rho - dt\frac{\partial \rho}{\partial t} - u\,dt\frac{\partial \rho}{\partial x} - v\,dt\frac{\partial \rho}{\partial y} - w\,dt\frac{\partial \rho}{\partial z};$$

l'équation précédente se change ainsi dans la suivante

$$(\text{K}) \quad 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial.\rho u}{\partial x} + \frac{\partial.\rho v}{\partial y} + \frac{\partial.\rho w}{\partial z};$$

c'est l'équation relative à la continuité du fluide, et il est aisé de voir qu'elle est la différentielle de l'équation (G) du numéro précédent, prise par rapport au temps t.

L'équation (H) est susceptible d'intégration dans un cas fort étendu, savoir, lorsque $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une variation exacte de x, y, z; ρ étant d'ailleurs une fonction quelconque de la pression p. Soit alors $\delta\varphi$ cette variation; l'équation (H) donne

$$\delta V - \frac{\delta p}{\rho} = \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

d'où l'on tire, en intégrant par rapport à δ,

$$V - \int \frac{\delta p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Il faudrait ajouter à cette intégrale une constante arbitraire, fonction de t; mais cette constante peut être censée renfermée dans la fonction φ. Cette dernière fonction donne la vitesse des molécules fluides, parallèlement aux axes des x, des y et des z; car on a

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

L'équation (K) relative à la continuité du fluide devient

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right);$$

ainsi l'on a relativement aux fluides homogènes

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

On peut observer que la fonction $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une variation exacte de x, y, z à tous les instants, si elle l'est à un seul instant. Supposons, en effet, qu'à un instant quelconque elle soit égale à $\delta\varphi$; dans l'instant suivant, elle sera

$$\delta\varphi + dt\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\delta z\right);$$

elle sera donc encore, à ce nouvel instant, une variation exacte, si $\frac{\partial u}{\partial t}\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\delta z$ est une variation exacte au premier instant; or l'équation (H) donne à cet instant

$$\frac{\partial u}{\partial t}\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\delta z = \delta V - \frac{\delta p}{\rho} - \tfrac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right];$$

le premier membre de cette équation est par conséquent une variation exacte en x, y, z; ainsi la fonction $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une variation exacte dans l'instant suivant, si elle l'est dans un instant; elle est donc alors une variation exacte à tous les instants.

Lorsque les mouvements sont très-petits, on peut négliger les carrés et les produits de u, v et w; l'équation (H) devient alors

$$\delta V - \frac{\delta p}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial t}\delta x + \frac{\partial v}{\partial t}\delta y + \frac{\partial w}{\partial t}\delta z;$$

ainsi, dans ce cas, $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une variation exacte, si, comme nous le supposons, p est fonction de ρ; en nommant donc encore $\delta\varphi$ cette différence, on aura

$$V - \int\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

et, si le fluide est homogène, l'équation de continuité deviendra

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Ces deux équations renferment toute la théorie des ondulations très-petites des fluides homogènes.

34. Considérons une masse fluide homogène douée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe des x. Soit n la vitesse angulaire de rotation, à une distance de l'axe que nous prendrons pour unité de distance; on aura $v = -nz$, $w = ny$; l'équation (H) du numéro précédent deviendra ainsi

$$\frac{\delta p}{\rho} = \delta V + n^2(y\delta y + z\delta z),$$

équation possible, puisque ses deux membres sont des différences exactes. L'équation (K) du même numéro deviendra

$$o = dt\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\,dt\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\,dt\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\,dt\frac{\partial\rho}{\partial z},$$

et il est visible que cette équation est satisfaite, si la masse fluide est homogène. Les équations du mouvement des fluides sont donc alors satisfaites, et par conséquent ce mouvement est possible.

La force centrifuge à la distance $\sqrt{y^2 + z^2}$ de l'axe de rotation est égale au carré $n^2(y^2 + z^2)$ de la vitesse, divisé par cette distance; la fonction $n^2(y\delta y + z\delta z)$ est donc le produit de la force centrifuge par l'élément de sa direction; ainsi, en comparant l'équation précédente du mouvement du fluide avec l'équation générale de l'équilibre des fluides, donnée dans le n° 17, on voit que les conditions du mouvement dont il s'agit se réduisent à celles de l'équilibre d'une masse fluide, sollicitée par les mêmes forces et par la force centrifuge due au mouvement de rotation, ce qui est visible d'ailleurs.

Si la surface extérieure de la masse fluide est libre, on aura $\delta p = o$ à cette surface, et par conséquent

$$o = \delta V + n^2(y\delta y + z\delta z);$$

d'où il suit que la résultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de la surface extérieure doit être perpendiculaire à cette surface; elle doit être, de plus, dirigée vers l'intérieur de la masse fluide. Ces conditions étant remplies, une masse fluide homogène sera en équilibre, en supposant même qu'elle recouvre un solide de figure quelconque.

Le cas que nous venons d'examiner est un de ceux dans lesquels la variation $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ n'est pas exacte; car alors cette variation devient $-n(z\delta y - y\delta z)$; ainsi, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, on ne peut pas supposer que la variation dont il s'agit est exacte, puisqu'elle ne l'est pas dans le cas très-simple où la mer n'au-

rait d'autre mouvement que celui de rotation qui lui est commun avec la Terre.

35. Déterminons, maintenant, les oscillations d'une masse fluide recouvrant un sphéroïde doué d'un mouvement de rotation nt autour de l'axe des x, et supposons-la très-peu dérangée de l'état d'équilibre, par l'action de forces très-petites. Soit, à l'origine du mouvement, r la distance d'une molécule fluide au centre de gravité du sphéroïde qu'elle recouvre, et que nous supposerons immobile; soit θ l'angle que le rayon r forme avec l'axe des x, et ϖ l'angle que le plan qui passe par l'axe des x et par ce rayon forme avec le plan des x et des y. Supposons qu'après le temps t le rayon r se change dans $r+\alpha s$, que l'angle θ se change dans $\theta+\alpha u$, et que l'angle ϖ se change dans $nt+\varpi+\alpha v$, αs, αu et αv étant de très-petites quantités dont nous négligerons les carrés et les produits; on aura

$$x=(r+\alpha s)\cos(\theta+\alpha u),$$
$$y=(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\cos(nt+\varpi+\alpha v),$$
$$z=(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\sin(nt+\varpi+\alpha v).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (F) du n° 32, on aura, en négligeant le carré de α,

$$(\mathrm{L})\quad\left\{\begin{aligned} &\alpha r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ &\quad+\alpha r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2n\sin^2\theta}{r}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\\ &\quad+\alpha\delta r\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}-2nr\sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\ &\quad=\frac{n^2}{2}\delta[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)]^2+\delta V-\frac{\delta p}{\rho}.\end{aligned}\right.$$

A la surface extérieure du fluide, on a $\delta p=0$; on a de plus, dans l'état d'équilibre,

$$0=\frac{n^2}{2}\delta[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)]^2+(\delta V),$$

(δV) étant la valeur de δV qui convient à cet état. Supposons que le fluide dont il s'agit soit la mer; la variation (δV) sera le produit de la pesanteur multipliée par l'élément de sa direction. Nommons g la pesanteur, et αy l'élévation d'une molécule d'eau de sa surface, au-dessus de sa surface d'équilibre, surface que nous regarderons comme le véritable niveau de la mer. La variation (δV) croîtra par cette élévation, dans l'état de mouvement, de la quantité $-\alpha g\,\delta y$, parce que la pesanteur est à fort peu près dirigée dans le sens des αy et vers leur origine. En désignant ensuite par $\alpha\,\delta V'$ la partie de δV relative aux nouvelles forces qui, dans l'état de mouvement, sollicitent la molécule, et qui dépendent soit des changements qu'éprouvent par cet état les attractions du sphéroïde et du fluide, soit des attractions étrangères, on aura à la surface

$$\delta V = (\delta V) - \alpha g \delta y + \alpha \delta V'.$$

La variation $\frac{n^2}{2}\delta\,[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)]^2$ croît de la quantité $\alpha n^2 \delta y . r \sin^2\theta$, en vertu de la hauteur de la molécule d'eau au-dessus du niveau de la mer; mais cette quantité peut être négligée relativement au terme $-\alpha g\,\delta y$, parce que le rapport $\frac{n^2 r}{g}$ de la force centrifuge à l'équateur, à la pesanteur, est une très-petite fraction égale à $\frac{1}{289}$. Enfin le rayon r est à fort peu près constant à la surface de la mer, parce qu'elle diffère très-peu d'une surface sphérique; on peut donc y supposer δr nulle. L'équation (L) devient ainsi, à la surface de la mer,

$$\begin{aligned} & r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ & \quad + r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\frac{\partial s}{\partial t}\right) = -g\delta y + \delta V', \end{aligned}$$

les variations δy et $\delta V'$ étant relatives aux deux variables θ et ϖ.

Considérons, présentement, l'équation relative à la continuité du fluide. Pour cela, concevons, à l'origine du mouvement, un parallélépipède rectangle dont la hauteur soit dr, dont la largeur soit $r d\varpi \sin\theta$, et dont la longueur soit $r d\theta$. Nommons r', θ' et ϖ' ce que deviennent r,

θ et ϖ après le temps t. En suivant le raisonnement du n° 32, on trouvera qu'après ce temps le volume de la molécule fluide est égal à un parallélépipède rectangle dont la hauteur est $\frac{\partial r'}{\partial r}\,dr$, dont la largeur est

$$r'\sin\theta'\left(\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi}\,d\varpi + \frac{\partial\varpi'}{\partial r}\,dr\right),$$

en éliminant dr au moyen de l'équation

$$\text{o} = \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,d\varpi + \frac{\partial r'}{\partial r}\,dr;$$

enfin, dont la longueur est

$$r'\left(\frac{\partial\theta'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\,d\varpi\right),$$

en éliminant dr et $d\varpi$, au moyen des équations

$$\text{o} = \frac{\partial r'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial r'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,d\varpi,$$

$$\text{o} = \frac{\partial\varpi'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\varpi'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi}\,d\varpi.$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}\beta' = {} & \frac{\partial r'}{\partial r}\,\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi} - \frac{\partial r'}{\partial r}\,\frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial\theta} + \frac{\partial r'}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial r} \\ & - \frac{\partial r'}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta'}{\partial r}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi} + \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,\frac{\partial\theta'}{\partial r}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial\theta} - \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\,\frac{\partial\varpi'}{\partial r},\end{aligned}$$

le volume de la molécule après le temps t sera $\beta' r'^2 \sin\theta'\,dr\,d\theta\,d\varpi$; ainsi, en nommant (ρ) la densité primitive de cette molécule, et ρ sa densité correspondante à t, on aura, en égalant l'expression primitive de sa masse à son expression après le temps t,

$$\rho\beta' r'^2 \sin\theta' = (\rho)\, r^2 \sin\theta;$$

c'est l'équation de la continuité du fluide. Dans le cas présent,

$$r' = r + \alpha s, \quad \theta' = \theta + \alpha u, \quad \varpi' = nt + \varpi + \alpha v;$$

on aura ainsi, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$6' = 1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial\theta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial\varpi}.$$

Supposons qu'après le temps t la densité primitive (ρ) du fluide se change en $(\rho) + \alpha\rho'$; l'équation précédente, relative à la continuité du fluide, donnera

$$o = r^2\left[\rho' + (\rho)\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right] + (\rho)\frac{\partial . r^2 s}{\partial r}.$$

36. Appliquons ces résultats aux oscillations de la mer. Sa masse étant homogène, on a $\rho' = o$, et par conséquent

$$o = \frac{\partial . r^2 s}{\partial r} + r^2\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Supposons, conformément à ce qui paraît avoir lieu dans la nature, la profondeur de la mer très-petite relativement au rayon r du sphéroïde terrestre; représentons-la par γ, γ étant une fonction très-petite de θ et de ϖ, qui dépend de la loi de cette profondeur. Si l'on intègre l'équation précédente, par rapport à r, depuis la surface du solide que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer, on voit que la valeur de s sera égale à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, plus à une très-petite fonction qui sera, par rapport à u et à v, du même ordre de petitesse que la fonction $\frac{\gamma}{r}$; or, à la surface du solide que la mer recouvre, lorsque les angles θ et ϖ se changent dans $\theta + \alpha u$ et $nt + \varpi + \alpha v$, il est aisé de voir que la distance d'une molécule d'eau, contiguë à cette surface, au centre de gravité de la Terre ne varie que d'une quantité très-petite par rapport à αu et αv, et du même ordre que les produits de ces quantités par l'excentricité du sphéroïde recouvert par la mer : la fonction indépendante de r, qui entre dans l'expression de s, est donc très-petite du même ordre; ainsi l'on peut négliger généralement s vis-à-vis de u et de v. L'équation du mouvement de la mer à sa surface,

donnée dans le n° 35, devient par là

$$(\mathrm{M})\quad \left\{\begin{aligned} & r^2\,\partial\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ & + r^2\,\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -g\,\delta y + \delta V'. \end{aligned}\right.$$

L'équation (L) du même numéro, relative à un point quelconque de l'intérieur de la masse du fluide, donne, dans l'état d'équilibre,

$$0 = \frac{n^2}{2}\,\delta[(r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)]^2 + (\delta V) - \frac{(\delta p)}{\rho},$$

(δV) et (δp) étant les valeurs de δV et δp qui, dans l'état d'équilibre, conviennent aux quantités $r + \delta s$, $\theta + \alpha u$ et $\varpi + \alpha v$. Supposons que, dans l'état de mouvement, on ait

$$\delta V = (\delta V) + \alpha\,\delta V', \quad \delta p = (\delta p) + \alpha\,\delta p';$$

l'équation (L) donnera

$$\frac{\partial\left(V' - \frac{p'}{\rho}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2nr\sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial t}.$$

L'équation (M) nous montre que $n\frac{\partial v}{\partial t}$ est du même ordre que y ou s, et par conséquent de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$; la valeur du premier membre de cette équation est donc du même ordre; ainsi, en multipliant cette valeur par dr, et en l'intégrant depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer, on aura $V' - \frac{p'}{\rho}$ égal à une fonction très-petite, de l'ordre $\frac{\gamma s}{r}$, plus à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, et que nous désignerons par λ; en n'ayant donc égard, dans l'équation (L) du n° 35, qu'aux deux variables θ et ϖ, elle se changera dans l'équation (M), avec la seule différence que le second membre se changera dans $\delta\lambda$. Mais, λ étant indépendant de la profondeur à laquelle se trouve la molécule d'eau que nous considérons, si l'on suppose cette

molécule très-voisine de la surface, l'équation (L) doit évidemment coïncider avec l'équation (M); on a donc $\delta\lambda = \delta V' - g\delta y$, et par conséquent

$$\delta\left(V' - \frac{p'}{\rho}\right) = \delta V' - g\delta y,$$

la valeur de $\delta V'$ dans le second membre de cette équation étant relative à la surface de la mer. Nous verrons, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, que cette valeur est à très-peu près la même pour toutes les molécules situées sur le même rayon terrestre, depuis la surface du solide que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer; on a donc, relativement à toutes ces molécules,

$$\frac{\delta p'}{\rho} = g\delta y,$$

ce qui donne p' égal à $\rho g y$, plus une fonction indépendante de θ, ϖ et r. Or, à la surface du niveau de la mer, la valeur de $\alpha p'$ est égale à la pression de la petite colonne d'eau αy qui s'élève au-dessus de cette surface, et cette pression est égale à $\alpha\rho g y$; on a donc, dans tout l'intérieur de la masse fluide, depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre jusqu'à la surface du niveau de la mer, $p' = \rho g y$; ainsi un point quelconque de la surface du sphéroïde recouvert par la mer est plus pressé que dans l'état d'équilibre, de tout le poids de la petite colonne d'eau comprise entre la surface de la mer et la surface du niveau. Cet excès de pression devient négatif dans les points où la surface de la mer s'abaisse au-dessous de la surface du niveau,

Il suit de ce que nous venons de voir que, si l'on n'a égard qu'aux variations de θ et de ϖ, l'équation (L) se change dans l'équation (M) pour toutes les molécules intérieures de la masse fluide. Les valeurs de u et de v, relatives à toutes les molécules de la mer situées sur le même rayon terrestre, sont donc déterminées par les mêmes équations différentielles; ainsi, en supposant, comme nous le ferons dans la théorie du flux et du reflux de la mer, qu'à l'origine du mouvement les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, v, $\frac{\partial v}{\partial t}$ ont été les mêmes pour toutes les molécules si-

tuées sur le même rayon, ces molécules resteront encore sur le même rayon durant les oscillations du fluide. Les valeurs de r, u et v peuvent donc être supposées les mêmes, à très-peu près, sur la petite partie du rayon terrestre comprise entre le solide que la mer recouvre et la surface de la mer; ainsi, en intégrant, par rapport à r, l'équation

$$o = \frac{\partial . r^2 s}{\partial r} + r^2\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

on aura

$$o = r^2 s - (r^2 s) + r^2\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

$(r^2 s)$ étant la valeur de $r^2 s$ à la surface du sphéroïde recouvert par la mer. La fonction $r^2 s - (r^2 s)$ est égale à très-peu près à $r^2[s-(s)] + 2r\gamma(s)$, (s) étant ce que devient s à la surface du sphéroïde; on peut négliger le terme $2r\gamma(s)$, vu la petitesse de γ et de (s); on aura ainsi

$$r^2 s - (r^2 s) = r^2[s - (s)].$$

Maintenant, la profondeur de la mer, correspondante aux angles $\theta + \alpha u$ et $nt + \varpi + \alpha v$, est $\gamma + \alpha[s - (s)]$: si l'on fixe l'origine des angles θ et $nt + \varpi$ à un point et à un méridien fixes sur la surface de la Terre, ce qui est permis, comme on le verra bientôt, cette même profondeur sera $\gamma + \alpha u \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \alpha v \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}$, plus l'élévation αy de la molécule fluide de la surface de la mer au-dessus de sa surface de niveau; on aura donc

$$s - (s) = y + u\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + v\frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}.$$

L'équation relative à la continuité du fluide deviendra, par conséquent,

$$\text{(N)} \qquad y = -\frac{\partial . \gamma u}{\partial \theta} - \frac{\partial . \gamma v}{\partial \varpi} - \frac{\gamma u \cos\theta}{\sin\theta}.$$

On peut observer que, dans cette équation, les angles θ et $nt + \varpi$ sont comptés relativement à un point et à un méridien fixes sur la Terre, et que, dans l'équation (M), ces mêmes angles sont comptés relativement

à l'axe des x et à un plan qui, passant par cet axe, aurait autour de lui un mouvement de rotation égal à n; or cet axe et ce plan ne sont pas fixes à la surface de la Terre, parce que l'attraction et la pression du fluide qui la recouvre doivent altérer un peu leur position sur cette surface, ainsi que le mouvement de rotation du sphéroïde. Mais il est aisé de voir que ces altérations sont aux valeurs de αu et de αv dans le rapport de la masse de la mer à celle du sphéroïde terrestre; ainsi, pour rapporter les angles θ et $nt+\varpi$ à un point et à un méridien invariables à la surface de ce sphéroïde dans les deux équations (M) et (N), il suffit d'altérer u et v de quantités de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$ et $\frac{\gamma v}{r}$, quantités que nous nous sommes permis de négliger; on peut donc supposer, dans ces équations, que αu et αv sont les mouvements du fluide en latitude et en longitude.

On peut observer encore que, le centre de gravité du sphéroïde étant supposé immobile, il faut transporter en sens contraire aux molécules fluides les forces dont il est animé par la réaction de la mer; mais, le centre commun de gravité du sphéroïde et de la mer ne changeant point en vertu de cette réaction, il est clair que le rapport de ces forces à celles dont les molécules sont animées par l'action du sphéroïde est du même ordre que le rapport de la masse fluide à celle du sphéroïde, et par conséquent de l'ordre $\frac{\gamma}{r}$; on peut donc les négliger dans le calcul de $\delta V'$.

37. Considérons de la même manière les mouvements de l'atmosphère. Nous ferons, dans cette recherche, abstraction de la variation de la chaleur à différentes latitudes et à diverses hauteurs, ainsi que de toutes les causes irrégulières qui l'agitent, et nous n'aurons égard qu'aux causes régulières qui agissent sur elle, comme sur l'océan. Nous supposerons conséquemment la mer recouverte d'un fluide élastique d'une température uniforme; nous supposerons encore, conformément à l'expérience, la densité de ce fluide proportionnelle à sa pression. Cette supposition donne à l'atmosphère une hauteur infinie;

mais il est facile de s'assurer qu'à une très-petite hauteur sa densité est si petite, qu'on peut la regarder comme nulle.

Cela posé, nommons s', u' et v', pour les molécules de l'atmosphère, ce que nous avons nommé s, u et v pour les molécules de la mer; l'équation (L) du n° 35 donnera

$$\begin{aligned}
&\alpha r^2 \delta\theta\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v'}{\partial t}\right)\\
&\quad + \alpha r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\frac{\partial s'}{\partial t}\right)\\
&\quad + \alpha\delta r\left(\frac{\partial^2 s'}{\partial t^2} - 2nr\sin^2\theta\frac{\partial v'}{\partial t}\right)\\
&= \frac{n^2}{2}\delta[(r+\alpha s')\sin(\theta+\alpha u')]^2 + \delta V - \frac{\delta p}{\rho}.
\end{aligned}$$

Considérons d'abord l'atmosphère dans l'état d'équilibre, dans lequel s', u', v' sont nuls. L'équation précédente donne alors, en l'intégrant,

$$\frac{n^2}{2}r^2\sin^2\theta + V - \int\frac{\delta p}{\rho} = \text{const.}$$

La pression p étant supposée proportionnelle à la densité, nous ferons $p = lg\rho$, g étant la pesanteur dans un lieu déterminé, que nous supposerons être l'équateur, et l étant une quantité constante qui exprime la hauteur de l'atmosphère, supposée partout de la même densité qu'à la surface de la mer : cette hauteur est très-petite par rapport au rayon du sphéroïde terrestre, dont elle n'est pas la 720ᵉ partie.

L'intégrale $\int\frac{\delta p}{\rho}$ est égale à $lg\log\rho$; l'équation précédente de l'équilibre de l'atmosphère devient, par conséquent,

$$lg\log\rho = \text{const.} + V + \frac{n^2}{2}r^2\sin^2\theta.$$

A la surface de la mer, la valeur de V est la même pour une molécule d'air que pour la molécule d'eau qui lui est contiguë, parce que les forces qui sollicitent l'une et l'autre molécule sont les mêmes; mais la

condition de l'équilibre des mers exige que l'on ait

$$V + \frac{n^2}{2} r^2 \sin^2\theta = \text{const.};$$

on a donc, à cette surface, ρ constant, c'est-à-dire que la densité de la couche d'air contiguë à la mer est partout la même, dans l'état d'équilibre.

Si l'on nomme R la partie du rayon r comprise entre le centre du sphéroïde et la surface de la mer, et r' la partie comprise entre cette surface et une molécule d'air élevée au-dessus, r' sera, aux quantités près de l'ordre $\frac{\left(\frac{n^2}{g} r'\right)^2}{R}$, la hauteur de cette molécule au-dessus de la surface de la mer : nous négligerons les quantités de cet ordre. L'équation entre ρ et r donnera

$$lg \log\rho = \text{const.} + V + r' \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{r'^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{n^2}{2} R^2 \sin^2\theta + n^2 R r' \sin^2\theta,$$

les valeurs de V, $\frac{\partial V}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ étant relatives à la surface de la mer, où l'on a

$$\text{const.} = V + \frac{n^2}{2} R^2 \sin^2\theta.$$

La quantité $-\frac{\partial V}{\partial r} - n^2 R \sin^2\theta$ est la pesanteur à cette même surface : nous la désignerons par g'. La fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ étant multipliée par la quantité très-petite r'^2, nous pouvons la déterminer dans la supposition de la Terre sphérique, et négliger la densité de l'atmosphère relativement à celle de la Terre; nous aurons ainsi, à fort peu près,

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = g' = \frac{m}{R^2},$$

m étant la masse de la Terre; partant

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2m}{R^3} = \frac{2g'}{R};$$

on aura donc

$$lg\log\rho = \text{const.} - r'g' + \frac{r'^2}{R}g',$$

d'où l'on tire

$$\rho = \Pi c^{-\frac{r'g'}{lg}\left(1-\frac{r'}{R}\right)},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et Π étant une constante, visiblement égale à la densité de l'air à la surface de la mer. Nommons h et h' les longueurs du pendule à seconde à la surface de la mer, sous l'équateur, et à la latitude de la molécule aérienne que nous considérons; on aura $\frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$, et par conséquent

$$\rho = \Pi c^{-\frac{r'h'}{lh}\left(1-\frac{r'}{R}\right)}.$$

Cette expression de la densité de l'air fait voir que les couches de même densité sont partout également élevées au-dessus de la mer, à la quantité près $\frac{r'(h'-h)}{h}$; mais, dans le calcul exact des hauteurs des montagnes par les observations du baromètre, cette quantité ne doit point être négligée.

Considérons présentement l'atmosphère dans l'état de mouvement, et déterminons les oscillations d'une couche de niveau, ou de même densité dans l'état d'équilibre. Soit $\alpha\varphi$ l'élévation d'une molécule d'air au-dessus de la surface de niveau à laquelle elle appartient dans l'état d'équilibre; il est clair qu'en vertu de cette élévation la valeur de δV sera augmentée de la variation différentielle $-\alpha g\delta\varphi$; on aura ainsi

$$\delta V = (\delta V) - \alpha g\delta\varphi + \alpha\delta V',$$

(δV) étant la valeur de δV qui, dans l'état d'équilibre, correspond à la couche de niveau et aux angles $\theta + \alpha u$ et $nt + \varpi + \alpha v$; et $\delta V'$ étant la partie de δV due aux nouvelles forces qui, dans l'état de mouvement, agitent l'atmosphère.

Soit $\rho = (\rho) + \alpha\rho'$, (ρ) étant la densité de la couche de niveau dans l'état d'équilibre. Si l'on fait $\frac{l\rho'}{(\rho)} = y'$, on aura

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{lg\,\delta(\rho)}{(\rho)} + \alpha g\,\delta y';$$

or on a, dans l'état d'équilibre,

$$o = \frac{n^2}{2}\delta[(r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)]^2 + (\delta V) - \frac{lg\,\delta(\rho)}{(\rho)};$$

l'équation générale du mouvement de l'atmosphère deviendra donc, relativement aux couches de niveau, par rapport auxquelles δr est nul à très-peu près,

$$r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v'}{\partial t}\right) + r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\frac{\partial s'}{\partial t}\right)$$
$$= \delta V' - g\,\delta\varphi - g\,\delta y' + n^2 r\sin^2\theta\,\delta[s' - (s')],$$

$\alpha(s')$ étant la variation de r correspondante, dans l'état d'équilibre, aux variations $\alpha u'$ et $\alpha v'$ des angles θ et ϖ.

Supposons que toutes les molécules d'air situées à l'origine sur le même rayon terrestre restent constamment sur un même rayon dans l'état de mouvement, ce qui a lieu, par ce qui précède, dans les oscillations de la mer, et voyons si cette supposition peut satisfaire aux équations du mouvement et de la continuité du fluide atmosphérique. Pour cela, il est nécessaire que les valeurs de u' et de v' soient les mêmes pour toutes ces molécules; or la valeur de $\delta V'$ est à très-peu près la même pour ces molécules, comme on le verra lorsque nous déterminerons, dans la suite, les forces d'où résulte cette variation; il est donc nécessaire que les variations $\delta\varphi$ et $\delta y'$ soient les mêmes pour ces molécules, et, de plus, que les quantités $2nr\,\delta\varpi\sin^2\theta\frac{\partial s'}{\partial t}$ et

$n^2 r \sin^2\theta\, \delta[s' - (s')]$ puissent être négligées dans l'équation précédente.

A la surface de la mer, on a $\varphi = y$, αy étant l'élévation de la surface de la mer au-dessus de sa surface de niveau. Examinons si les suppositions de φ égal à y, et de y constant pour toutes les molécules d'air situées sur le même rayon, peuvent subsister avec l'équation de la continuité de fluide. Cette équation, par le n° 35, est

$$o = r^2\left[\rho' + (\rho)\left(\frac{\partial u'}{\partial\theta} + \frac{\partial v'}{\partial\varpi} + \frac{u'\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right] + (\rho)\frac{\partial . r^2 s'}{\partial r},$$

d'où l'on tire

$$y = -l\left(\frac{\partial . r^2 s'}{r^2 \partial r} + \frac{\partial u'}{\partial\theta} + \frac{\partial v'}{\partial\varpi} + \frac{u'\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

$r + \alpha s'$ est égal à la valeur de r de la surface de niveau, qui correspond aux angles $\theta + \alpha u$ et $\varpi + \alpha v$, plus à l'élévation de la molécule d'air au-dessus de cette surface; la partie de $\alpha s'$ qui dépend de la variation des angles θ et ϖ étant de l'ordre $\frac{\alpha n^2 u}{g}$, on peut la négliger dans l'expression précédente de y', et, par conséquent, supposer dans cette expression $s' = \varphi$; si l'on fait ensuite $\varphi = y$, on aura $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = o$, puisque la valeur de φ est alors la même relativement à toutes les molécules situées sur le même rayon. De plus, y est, par ce qui précède, de l'ordre l ou $\frac{n^2}{g}$; l'expression de y' deviendra ainsi

$$y' = -l\left(\frac{\partial u'}{\partial\theta} + \frac{\partial v'}{\partial\varpi} + \frac{u'\cos\theta}{\sin\theta}\right);$$

ainsi, u' et v' étant les mêmes pour toutes les molécules situées primitivement sur le même rayon, la valeur de y' sera la même pour toutes ces molécules. De plus, il est visible, par ce que nous venons de dire, que les quantités $2nr\delta\varpi \sin^2\theta \frac{\partial s'}{\partial t}$ et $n^2 r \sin^2\theta\, \delta[s' - (s')]$ peuvent être

négligées dans l'équation précédente du mouvement de l'atmosphère, qui peut alors être satisfaite en supposant que u' et v' sont les mêmes pour toutes les molécules de l'air situées primitivement sur le même rayon; la supposition que toutes ces molécules restent constamment sur un même rayon, durant les oscillations du fluide, peut donc subsister avec les équations du mouvement et de la continuité du fluide atmosphérique. Dans ce cas, les oscillations des diverses couches de niveau sont les mêmes, et se déterminent au moyen des équations

$$r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v'}{\partial t}\right)+r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u'}{\partial t}\right)=\delta V'-g\delta y'-g\delta y,$$

$$y'=-l\left(\frac{\partial u'}{\partial\theta}+\frac{\partial v'}{\partial\varpi}+\frac{u'\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Ces oscillations de l'atmosphère doivent produire des oscillations analogues dans les hauteurs du baromètre. Pour déterminer celles-ci au moyen des premières, considérons un baromètre fixe à une hauteur quelconque au-dessus de la surface de la mer. La hauteur du mercure est proportionnelle à la pression qu'éprouve sa surface exposée à l'action de l'air; elle peut donc être représentée par $lg\rho$; mais cette surface est successivement exposée à l'action de diverses couches de niveau, qui s'élèvent et s'abaissent comme la surface de la mer; ainsi la valeur de ρ à la surface du mercure varie : 1° parce qu'elle appartient à une couche de niveau qui, dans l'état d'équilibre, était moins élevée de la quantité αy; 2° parce que la densité d'une couche augmente, dans l'état de mouvement, de $\alpha\rho'$ ou de $\frac{\alpha(\rho)y'}{l}$. En vertu de la première cause, la variation de ρ est $-\alpha y\frac{\partial\rho}{\partial r}$ ou $\frac{\alpha(\rho)y'}{l}$; la variation totale de la densité ρ, à la surface du mercure, est donc $\alpha(\rho)\frac{y+y'}{l}$. Il suit de là que, si l'on nomme k la hauteur du mercure dans le baromètre, relative à l'état d'équilibre, ses oscillations, dans l'état de mouvement, seront exprimées par la fonction $\frac{\alpha k(y+y')}{l}$; elles sont donc semblables à

toutes les hauteurs au-dessus de la mer, et proportionnelles aux hauteurs du baromètre.

Il ne s'agit plus maintenant, pour déterminer les oscillations de la mer et de l'atmosphère, que de connaître les forces qui agitent ces deux masses fluides, et d'intégrer les équations différentielles précédentes; c'est ce que nous ferons dans la suite de cet Ouvrage.

LIVRE II.

DE LA LOI DE LA PESANTEUR UNIVERSELLE ET DU MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA LOI DE LA PESANTEUR UNIVERSELLE, TIRÉE DES PHÉNOMÈNES.

---

1. Après avoir développé les lois du mouvement, nous allons, en partant de ces lois et de celles des mouvements célestes, présentées avec détail dans l'Ouvrage intitulé : *Exposition du Système du Monde,* nous élever à la loi générale de ces mouvements. Celui de tous les phénomènes qui semble le plus propre à la faire découvrir est le mouvement elliptique des planètes et des comètes autour du Soleil; voyons ce qu'il donne sur cet objet. Pour cela, nommons x et y les coordonnées rectangles d'une planète, dans le plan de son orbite, et fixons leur origine au centre du Soleil; nommons, de plus, P et Q les forces dont cette planète est animée, dans son mouvement relatif autour du Soleil, parallèlement aux axes des x et des y, et supposons que ces forces tendent vers l'origine des coordonnées; enfin, soit dt l'élément du temps, que nous regarderons comme constant; on aura, par le Chapitre II du premier Livre,

$$(1) \qquad o = \frac{d^2x}{dt^2} + P,$$

$$(2) \qquad o = \frac{d^2y}{dt^2} + Q.$$

Si l'on ajoute la première de ces équations, multipliée par $-y$, à la seconde, multipliée par x, on aura

$$o = \frac{d(x\,dy - y\,dx)}{dt^2} + xQ - yP.$$

Il est aisé de voir que $x\,dy - y\,dx$ est le double de l'aire que le rayon vecteur de la planète décrit autour du Soleil dans l'instant dt; cette aire est proportionnelle à l'élément du temps, suivant la première loi de Kepler, en sorte que l'on a

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt,$$

c étant une constante; la différentielle du premier membre de cette équation est donc nulle, ce qui donne

$$xQ - yP = o.$$

Il suit de là que les forces P et Q sont entre elles dans le rapport de x à y, et qu'ainsi leur résultante passe par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le centre du Soleil. D'ailleurs, la courbe décrite par la planète étant concave vers le Soleil, il est visible que la force qui la fait décrire tend vers cet astre.

La loi des aires proportionnelles aux temps employés à les décrire nous conduit donc à ce premier résultat remarquable, savoir, que la force qui sollicite les planètes et les comètes est dirigée vers le centre du Soleil.

2. Déterminons maintenant la loi suivant laquelle cette force agit à différentes distances de cet astre. Il est clair que, les planètes et les comètes s'approchant et s'éloignant alternativement du Soleil à chaque révolution, la nature du mouvement elliptique doit nous conduire à cette loi. Reprenons, dans cette vue, les équations différentielles (1) et (2) du numéro précédent. Si l'on ajoute la première, multipliée par dx, à la seconde, multipliée par dy, on aura

$$o = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} + P\,dx + Q\,dy,$$

et, en intégrant,

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 2\int(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy),$$

la constante arbitraire étant indiquée par le signe intégral. En substituant, au lieu de dt, sa valeur $\frac{x\,dy - y\,dx}{c}$, donnée par la loi de la proportionnalité des aires aux temps, on aura

$$0 = \frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{(x\,dy - y\,dx)^2} + 2\int(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy).$$

Transformons, pour plus de simplicité, les coordonnées x et y en rayon vecteur et en angle traversé, conformément aux usages astronomiques. Soit r le rayon mené du centre du Soleil à celui de la planète, ou son rayon vecteur; soit v l'angle qu'il forme avec l'axe des x; on aura

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

d'où l'on tire

$$dx^2 + dy^2 = r^2 dv^2 + dr^2, \quad x\,dy - y\,dx = r^2 dv.$$

Si l'on désigne ensuite par φ la force principale qui anime la planète, on aura, par le numéro précédent,

$$\mathrm{P} = \varphi\cos v, \quad \mathrm{Q} = \varphi\sin v, \quad \varphi = \sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2},$$

ce qui donne

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \varphi\,dr;$$

on aura donc

$$0 = \frac{c^2(r^2 dv^2 + dr^2)}{r^4 dv^2} + 2\int\varphi\,dr,$$

d'où l'on tire

(3) $$dv = \frac{c\,dr}{r\sqrt{-c^2 - 2r^2\int\varphi\,dr}}.$$

Cette équation donnera, au moyen des quadratures, la valeur de v en r, lorsque la force φ sera connue en fonction de r; mais si, cette force

étant inconnue, la nature de la courbe qu'elle fait décrire est donnée, alors, en différentiant l'expression précédente de $2\int\varphi\, dr$, on aura, pour déterminer φ, l'équation

(4) $$\varphi = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2}\,\frac{d\,\frac{dr^2}{r^4\,dv^2}}{dr}.$$

Les orbes des planètes sont des ellipses dont le centre du Soleil occupe un des foyers; or si, dans l'ellipse, on nomme ϖ l'angle que le grand axe fait avec l'axe des x; si, de plus, on fixe au foyer l'origine des x, et que l'on désigne par a le demi-grand axe et par e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, on aura

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)},$$

équation qui devient celle d'une parabole, lorsque $e=1$ et que a est infini, et qui appartient à l'hyperbole, lorsque e surpasse l'unité et que a est négatif. Cette équation donne

$$\frac{dr^2}{r^4\,dv^2} = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)},$$

et par conséquent $$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\,\frac{1}{r^2};$$

ainsi, les orbites des planètes et des comètes étant des sections coniques, la force φ est réciproque au carré de la distance du centre de ces astres à celui du Soleil.

On voit, de plus, que, si la force φ est réciproque au carré de la distance ou exprimée par $\frac{h}{r^2}$, h étant un coefficient constant, l'équation précédente des sections coniques satisfera à l'équation différentielle (4) entre r et v, que donne l'expression de φ, lorsqu'on y change φ dans $\frac{h}{r^2}$. On a alors $h = \frac{c^2}{a(1-e^2)}$, ce qui forme une équation de condition entre les deux arbitraires a et e de l'équation aux sections coniques; les troi

que $\varphi_{,}$, $\frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2}$ et $\frac{d\theta_{,}}{ds}$ sont des quantités de l'ordre α,

$$\frac{d^2 x_{,}}{ds^2} = \alpha \frac{d^2 u'_{,}}{ds^2} \sin\theta_{,} + r_{,} \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} \cos\theta_{,} - r_{,} \sin\theta_{,} \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2}.$$

On a ensuite

$$\alpha \frac{d^2 u'_{,}}{ds^2} = \alpha \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2} \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2} - \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} = \frac{\alpha \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}} - \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}\psi_{,};$$

de plus, $ds = r_{,} \sin\theta_{,} d\varphi_{,}$; on aura donc, en substituant pour $r_{,}$, $\theta_{,}$, $\frac{d\varphi_{,}}{ds}$ et $\frac{d^2\theta_{,}}{ds^2}$ leurs valeurs précédentes,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_{,}}{ds^2} = (1 - \alpha u'_{,}) \frac{\sin^2\psi_{,}}{\cos\psi_{,}} + \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}^2\psi_{,} \sin\psi_{,} \\ - \frac{1}{\cos\psi_{,}} \left(1 - \alpha u'_{,} + \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}\psi_{,}\right) + \frac{\alpha \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos\psi_{,}}.\end{aligned}$$

On a, comme on vient de le voir, en négligeant les puissances supérieures de s,

$$V - V_{,} = \frac{s}{\cos\psi_{,}} \left(1 - \alpha u'_{,} + \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}\psi_{,} - \frac{\alpha \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}}\right), \quad \text{et} \quad \frac{dy_{,}}{ds} = 1;$$

on a donc

$$\frac{dx'}{ds} = s(1 - \alpha u'_{,}) \frac{\sin^2\psi_{,}}{\cos\psi_{,}} + \alpha s \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}^2\psi_{,} \sin\psi_{,} - \alpha s \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2} \frac{\sin^2\psi_{,}}{\cos^3\psi_{,}};$$

on trouvera semblablement

$$\frac{dz}{ds} = -s(1 - \alpha u'_{,}) \sin\psi_{,} - \alpha s \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}^2\psi_{,} \cos\psi_{,} + \alpha s \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2} \frac{\sin\psi_{,}}{\cos^2\psi_{,}};$$

le cosinus de l'angle azimutal à l'extrémité de l'arc s sera ainsi

$$s \operatorname{tang}\psi_{,} \left(1 - \alpha u'_{,} + \alpha \frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} \operatorname{tang}\psi_{,} - \frac{\alpha \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}}\right).$$

Ce cosinus étant fort petit, il peut être pris pour le complément de

l'angle azimutal qui, par conséquent, est égal à

$$100^\circ - s\tang\psi_{,}\left(1 - \alpha u'_{,} + \alpha\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}\tang\psi_{,} - \frac{\alpha\dfrac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}}\right).$$

Il faut, pour plus d'exactitude, ajouter à cet angle la partie dépendante de s^3 et indépendante de α, que l'on obtient dans l'hypothèse de la Terre sphérique : cette partie est égale à $\frac{1}{3}s^3(\frac{1}{2} + \tang^2\psi_{,})\tang\psi_{,}$; ainsi l'angle azimutal à l'extrémité de l'arc s est égal à

$$100^\circ - s\tang\psi_{,}\left(1 - \alpha u'_{,} + \alpha\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}\tang\psi_{,} - \frac{\alpha\dfrac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}} - \tfrac{1}{3}s^2(\tfrac{1}{2} + \tang^2\psi_{,})\right).$$

Le rayon osculateur de la ligne géodésique formant un angle quelconque avec le plan du méridien est égal à

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

ds étant supposé constant; soit R ce rayon. L'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u'$$

donne

$$x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z = -ds^2 + \alpha d^2u'.$$

Si l'on ajoute le carré de cette équation aux carrés des équations (O), on aura, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$(x^2 + y^2 + z^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] = ds^4 - 2\alpha ds^2 d^2u',$$

d'où l'on tire

$$R = 1 + \alpha u' + \alpha\frac{d^2u'}{ds^2}.$$

Dans le sens du méridien, on a

$$\alpha\frac{d^2u'}{ds^2} = \alpha\frac{\partial^2u'}{\partial\psi^2};$$

partant,

$$R = 1 + \alpha u' + \alpha\frac{\partial^2u'}{\partial\psi^2}.$$

Dans le sens perpendiculaire au méridien, on a, par ce qui précède,

$$\alpha\frac{d^2u'_{,}}{ds^2}=\frac{\alpha\dfrac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}}-\alpha\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}\operatorname{tang}\psi_{,};$$

partant,

$$R=1+\alpha u'_{,}-\alpha\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}\operatorname{tang}\psi_{,}+\frac{\alpha\dfrac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}}.$$

Si dans l'expression précédente de $V-V_{,}$ on fait $\frac{s}{R}=s'$, elle prend cette forme très-simple, relative à une sphère du rayon R,

$$V-V_{,}=\frac{s'}{\cos\psi_{,}}\left(1-\tfrac{1}{3}s'^2\operatorname{tang}^2\psi_{,}\right);$$

l'expression de l'angle azimutal devient

$$100^{\circ}-s'\operatorname{tang}\psi_{,}\left[1-\tfrac{1}{3}s'^2\left(\tfrac{1}{2}+\operatorname{tang}^2\psi_{,}\right)\right].$$

Nommons λ l'angle que le premier côté de la ligne géodésique forme avec le plan correspondant du méridien céleste; on aura

$$\frac{d^2u'}{ds^2}=\frac{\partial u'}{\partial\varphi}\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{\partial u'}{\partial\psi}\frac{d^2\psi}{ds^2}+\frac{\partial^2u'}{\partial\varphi^2}\frac{d\varphi^2}{ds^2}+2\frac{\partial^2u'}{\partial\varphi\,\partial\psi}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\psi}{ds}+\frac{\partial^2u'}{\partial\psi^2}\frac{d\psi^2}{ds^2}.$$

Mais dans l'hypothèse de la Terre sphérique on a

$$\frac{d\varphi_{,}}{ds}=\frac{\sin\lambda}{\cos\psi_{,}},\qquad \frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2}=\frac{2\sin\lambda\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}\operatorname{tang}\psi_{,},$$

$$\frac{d\psi_{,}}{ds}=\cos\lambda,\qquad \frac{d^2\psi_{,}}{ds^2}=-\sin^2\lambda\operatorname{tang}\psi_{,};$$

partant,

$$\frac{d^2u'_{,}}{ds^2}=2\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}\left(\frac{\partial u'_{,}}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\psi_{,}+\frac{\partial^2u'_{,}}{\partial\varphi\,\partial\psi}\right)-\sin^2\lambda\operatorname{tang}\psi_{,}\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}$$
$$+\frac{\partial^2u'_{,}}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\lambda}{\cos^2\psi_{,}}+\frac{\partial^2u'_{,}}{\partial\psi^2}\cos^2\lambda;$$

le rayon osculateur R dans le sens de cette ligne géodésique est donc

$$1 + \alpha u'_{,} + 2\alpha \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}\left(\frac{\partial u'_{,}}{\partial\varphi}\tang\psi_{,} + \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi\,\partial\psi}\right) - \alpha\sin^2\lambda\tang\psi_{,}\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi}$$
$$+ \alpha\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\lambda}{\cos^2\psi_{,}} + \alpha\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\psi^2}\cos^2\lambda.$$

Soit, pour abréger,

$$K = 1 + \alpha u'_{,} - \tfrac{1}{2}\alpha\tang\psi_{,}\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} + \frac{1}{2}\frac{\alpha\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}} + \tfrac{1}{2}\alpha\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\psi^2},$$

$$A = \frac{\alpha}{\cos\psi_{,}}\left(\frac{\partial u'_{,}}{\partial\varphi}\tang\psi_{,} + \frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi\,\partial\psi}\right),$$

$$B = \frac{\alpha}{2}\tang\psi_{,}\frac{\partial u'_{,}}{\partial\psi} - \frac{\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\varphi^2}}{\cos^2\psi_{,}} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 u'_{,}}{\partial\psi^2};$$

on aura

$$R = K + A\sin 2\lambda + B\cos 2\lambda.$$

Les observations des angles azimutaux et de la différence des latitudes aux extrémités de deux lignes géodésiques mesurées, l'une dans le sens du méridien, l'autre dans le sens perpendiculaire au méridien, feront connaître, par ce qui précède, les valeurs de A, B et K; car ces observations donnent les rayons osculateurs dans ces deux sens. Soient R et R′ ces rayons; on aura

$$K = \frac{R' + R''}{2}, \quad B = \frac{R' - R''}{2},$$

et la valeur de A sera déterminée soit par l'azimut de l'extrémité de l'arc mesuré dans le sens du méridien, soit par la différence en latitude des deux extrémités de l'arc mesuré dans le sens perpendiculaire au méridien. On aura ainsi le rayon osculateur de la ligne géodésique dont le premier côté forme un angle quelconque avec le plan du méridien.

Si l'on nomme 2E un angle dont la tangente est $\frac{A}{B}$, on aura

$$R = K + \sqrt{A^2 + B^2}\cos(2\lambda - 2E);$$

le plus grand rayon osculateur répond à $\lambda = \mathrm{E}$; la ligne géodésique correspondante forme donc l'angle E avec le plan du méridien. Le plus petit rayon osculateur répond à $\lambda = 100° + \mathrm{E}$; soit r ce plus petit rayon, et r' le plus grand; on aura

$$\mathrm{R} = r + (r' - r)\cos^2(\lambda - \mathrm{E}),$$

$\lambda - \mathrm{E}$ étant l'angle que la ligne géodésique correspondante à R forme avec celle qui correspond à r'.

Nous avons déjà observé qu'à chaque point de la surface de la Terre on peut concevoir un ellipsoïde osculateur sur lequel les degrés dans tous les sens sont sensiblement les mêmes dans une petite étendue autour du point d'osculation. Exprimons le rayon de cet ellipsoïde par la fonction (*)

$$1 - \alpha\sin^2\psi[1 + h\cos 2(\varphi + 6)],$$

les longitudes φ étant comptées d'un méridien donné. L'expression de l'arc terrestre mesuré dans le sens du méridien sera, par ce qui précède,

$$\varepsilon - \frac{\alpha\varepsilon}{2}[1 + h\cos 2(\varphi + 6)](1 + 3\cos 2\psi - 3\varepsilon\sin 2\psi).$$

(*) Il y a dans cet alinéa des inexactitudes qui ont été signalées par Bowditch dans son édition de la *Mécanique céleste;* mais les corrections proposées par le consciencieux commentateur me paraissent s'écarter du texte de Laplace plus qu'il n'est nécessaire. Il me semble préférable de corriger de la manière suivante les formules du texte :

1° Rayon de l'ellipsoïde,

$$1 + \alpha\cos^2\psi[1 + h\cos 2(\varphi + 6)];$$

2° Longueur de l'arc terrestre mesuré dans le sens du méridien,

$$\varepsilon + \frac{\alpha\varepsilon}{2}[1 + h\cos 2(\varphi + 6)](1 - 3\cos 2\psi + 3\varepsilon\sin 2\psi);$$

3° Valeur de l'angle ϖ,

$$\varpi = -2\alpha\varepsilon h\sin\psi\,\mathrm{tang}\psi\sin 2(\varphi + 6);$$

4° Valeur du degré mesuré dans le sens perpendiculaire au méridien,

$$1° + 1°.\alpha[1 + h\cos 2(\varphi + 6)](1 + \sin^2\psi) - 4°.\alpha h\cos 2(\varphi + 6).$$

Ces formules peuvent se déduire de celles de l'édition américaine, en prenant pour unité ce que Bowditch appelle $1 - \alpha$. V. P.

Si l'arc mesuré est considérable, et si l'on a observé, comme en France, la latitude de quelques points intermédiaires entre les extrêmes, on aura par ces mesures et la grandeur du rayon pris pour unité, et la valeur de $\alpha[1 + h\cos 2(\varphi + 6)]$. On a ensuite, par ce qui précède,

$$\varpi = -2\alpha h\varepsilon \frac{\tang^2\psi(1 + \cos^2\psi)}{\cos\psi} \sin 2(\varphi + 6);$$

l'observation des angles azimutaux aux deux extrémités de l'arc fera connaître $\alpha h \sin 2(\varphi + 6)$. Enfin, le degré mesuré dans le sens perpendiculaire au méridien est

$$1^\circ + 1^\circ.\alpha[1 + h\cos 2(\varphi + 6)]\sin^2\psi + 4^\circ.\alpha h \tang^2\psi \cos 2(\varphi + 6);$$

la mesure de ce degré donnera donc la valeur de $\alpha h \cos 2(\varphi + 6)$. Ainsi l'ellipsoïde osculateur sera déterminé par ces diverses mesures; il serait nécessaire, pour un aussi grand arc, d'avoir égard au carré de ε dans l'expression de l'angle ϖ, surtout si, comme on l'a observé en France, l'angle azimutal ne varie pas proportionnellement à l'arc mesuré; il faudrait même alors ajouter à l'expression précédente du rayon de l'ellipsoïde un terme de la forme $\alpha k \sin\psi \cos\psi \sin(\varphi + 6')$, pour avoir l'expression la plus générale de ce rayon.

39. La figure elliptique est la plus simple après celle de la sphère; on a vu précédemment qu'elle doit être celle de la Terre et des planètes, en les supposant originairement fluides, si d'ailleurs elles ont conservé, en se durcissant, leur figure primitive; il était donc naturel de comparer à cette figure les degrés mesurés des méridiens; mais cette comparaison a donné pour la figure des méridiens des ellipses différentes et qui s'éloignent trop des observations pour pouvoir être admises. Cependant, avant de renoncer entièrement à la figure elliptique, il faut déterminer celle dans laquelle le plus grand écart des degrés mesurés est plus petit que dans toute autre figure elliptique, et voir si cet écart est dans les limites des erreurs des observations. On y parviendra par la méthode suivante.

Soient $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$,... les degrés mesurés des méridiens; soient $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$,... les carrés des sinus des latitudes correspondantes; supposons que, dans l'ellipse cherchée, le degré du méridien soit exprimé par la formule $z+py$; en nommant $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$,... les erreurs des observations, on aura les équations suivantes, dans lesquelles nous supposerons que $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$,... forment une progression croissante,

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} a^{(1)} - z - p^{(1)}y = x^{(1)}, \\ a^{(2)} - z - p^{(2)}y = x^{(2)}, \\ a^{(3)} - z - p^{(3)}y = x^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a^{(n)} - z - p^{(n)}y = x^{(n)}, \end{cases}$$

n étant le nombre des degrés mesurés.

On éliminera de ces équations les deux inconnues z et y, et l'on aura $n-2$ équations de condition entre les n erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,..., $x^{(n)}$. Il faut maintenant déterminer le système de ces erreurs dans lequel la plus grande est, abstraction faite du signe, moindre que dans tout autre système.

Supposons d'abord que l'on n'ait entre ces erreurs qu'une seule équation de condition, que nous pouvons représenter par celle-ci

$$a = mx^{(1)} + nx^{(2)} + px^{(3)} + \dots,$$

a étant positif. On aura le système des valeurs de $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,..., qui donne, abstraction faite du signe, la plus petite valeur à la plus grande, en les supposant, au signe près, toutes égales entre elles et au quotient de a divisé par la somme des coefficients m, n, p,..., pris positivement. Quant au signe que chaque quantité doit avoir, il doit être le même que celui du coefficient de cette quantité dans l'équation proposée.

Si l'on a deux équations de condition entre ces erreurs, le système qui donnera la plus petite valeur possible à la plus grande sera tel qu'abstraction faite du signe, toutes ces erreurs seront égales entre elles,

à l'exception d'une seule qui sera plus petite que les autres, ou du moins qui ne les surpassera pas. En supposant donc que $x^{(1)}$ soit cette erreur, on la déterminera, en fonction de $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$, au moyen de l'une des équations de condition proposées; en substituant ensuite cette valeur de $x^{(1)}$ dans l'autre équation de condition, on en formera une entre $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$; représentons-la par la suivante

$$a = mx^{(2)} + nx^{(3)} + \ldots,$$

a étant positif; on aura, comme ci-dessus, les valeurs de $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$, en divisant a par la somme des coefficients m, $n, \ldots$, pris positivement, et en donnant successivement au quotient les signes de m, $n, \ldots$. Ces valeurs, substituées dans l'expression de $x^{(1)}$ en $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$, donneront la valeur de $x^{(1)}$, et, si cette valeur, abstraction faite du signe, n'est pas plus grande que celle de $x^{(2)}$, ce système de valeurs sera celui qu'il faut adopter; mais, si elle est plus grande, alors la supposition que $x^{(1)}$ est la plus petite erreur n'est pas légitime, et il faudra faire successivement la même supposition sur $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$, jusqu'à ce que l'on parvienne à une erreur qui y satisfasse.

Si l'on a trois équations de condition entre ces erreurs, le système qui donnera la plus petite valeur possible à la plus grande sera tel que, abstraction faite du signe, toutes ces erreurs seront égales entre elles, à l'exception de deux, qui seront moindres que les autres. En supposant donc que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ soient ces deux erreurs, on les éliminera de la troisième des équations de condition au moyen des deux autres équations, et l'on aura une équation de condition entre les erreurs $x^{(3)}$, $x^{(4)}, \ldots$; représentons-la par la suivante

$$a = mx^{(3)} + nx^{(4)} + \ldots,$$

a étant positif. On aura les valeurs de $x^{(3)}$, $x^{(4)}, \ldots$, en divisant a par la somme des coefficients m, $n, \ldots$, pris positivement, et en donnant successivement au quotient les signes de m, $n, \ldots$. Ces valeurs, substituées dans les expressions de $x^{(1)}$ et de $x^{(2)}$ en $x^{(3)}$, $x^{(4)}, \ldots$, donneront les valeurs de $x^{(1)}$ et de $x^{(2)}$, et si ces dernières valeurs, abstraction faite

du signe, ne surpassent pas $x^{(3)}$, on aura le système d'erreurs qu'il faut adopter; mais, si l'une de ces valeurs surpasse $x^{(3)}$, la supposition que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont les plus petites erreurs n'est pas légitime, et il faudra faire la même supposition sur une autre combinaison des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$, prises deux à deux, jusqu'à ce que l'on parvienne à une combinaison dans laquelle cette supposition soit légitime. Il est facile d'étendre cette méthode au cas où l'on aurait quatre ou un plus grand nombre d'équations de condition entre les erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$. Ces erreurs étant ainsi connues, il sera facile d'en conclure les valeurs de z et de y.

La méthode que nous venons d'exposer s'applique à toutes les questions du même genre; ainsi, ayant un nombre n d'observations d'une comète, on peut, à son moyen, déterminer l'orbite parabolique dans laquelle la plus grande erreur est, abstraction faite du signe, moindre que dans toute autre orbite parabolique, et reconnaître par là si l'hypothèse parabolique peut représenter ces observations. Mais, quand le nombre des observations est considérable, cette méthode conduit à de longs calculs, et l'on peut, dans le problème qui nous occupe, arriver facilement au système cherché des erreurs, par la méthode suivante.

Concevons que $x^{(i)}$ soit, abstraction faite du signe, la plus grande des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots$; nous observerons d'abord qu'il doit exister une autre erreur $x^{(i')}$ égale et de signe contraire à $x^{(i)}$; autrement, on pourrait, en faisant varier z convenablement dans l'équation

$$a^{(i)} - z - p^{(i)} y = x^{(i)},$$

diminuer l'erreur $x^{(i)}$, en lui conservant la propriété d'être l'erreur extrême, ce qui est contre l'hypothèse. Nous observerons ensuite que, $x^{(i)}$ et $x^{(i')}$ étant les deux erreurs extrêmes, l'une positive et l'autre négative, et qui doivent être égales, comme on vient de le voir, il doit exister une troisième erreur $x^{(i'')}$ égale, abstraction faite du signe, à $x^{(i)}$. En effet, si l'on retranche l'équation correspondante à $x^{(i)}$ de l'équation correspondante à $x^{(i')}$, on aura

$$a^{(i')} - a^{(i)} - (p^{(i')} - p^{(i)}) y = x^{(i')} - x^{(i)}.$$

Le second membre de cette équation est, abstraction faite du signe, la somme des erreurs extrêmes, et il est clair qu'en faisant varier convenablement y, on peut la diminuer, en lui conservant la propriété d'être la plus grande des sommes que l'on peut obtenir par l'addition ou par la soustraction des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots$, prises deux à deux, pourvu qu'il n'y ait point une troisième erreur $x^{(i'')}$ égale, abstraction faite du signe, à $x^{(i)}$; or, la somme des erreurs extrêmes étant diminuée, et ces erreurs étant rendues égales au moyen de la valeur de z, chacune de ces erreurs serait diminuée, ce qui est contre l'hypothèse. Il existe donc trois erreurs $x^{(i)}$, $x^{(i')}$, $x^{(i'')}$, égales entre elles, abstraction faite du signe, et dont l'une a un signe contraire à celui des deux autres.

Supposons que ce soit $x^{(i')}$; alors le nombre i' tombera entre les deux nombres i et i''. Pour le faire voir, imaginons que cela ne soit pas, et que i' tombe en deçà ou au delà des nombres i et i''. En retranchant l'équation correspondante à i' successivement des deux équations correspondantes à i et à i'', on aura

$$a^{(i)} - a^{(i')} - (p^{(i)} - p^{(i')})y = x^{(i)} - x^{(i')},$$
$$a^{(i'')} - a^{(i')} - (p^{(i'')} - p^{(i')})y = x^{(i'')} - x^{(i')}.$$

Les seconds membres de ces équations sont égaux et de même signe; ils sont encore, abstraction faite du signe, la somme des erreurs extrêmes; or il est clair qu'en faisant varier convenablement y, on peut diminuer chacune de ces sommes, puisque le coefficient de y a le même signe dans les deux premiers membres; on peut d'ailleurs, en faisant varier z convenablement, conserver à $x^{(i')}$ la même valeur; $x^{(i)}$ et $x^{(i'')}$ seraient donc alors, abstraction faite du signe, moindres que $x^{(i')}$, qui deviendrait la plus grande des erreurs, sans avoir d'égale, et dans ce cas on peut, comme on vient de le voir, diminuer l'erreur extrême, ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi le nombre i' doit tomber entre les nombres i et i''.

Déterminons maintenant lesquelles des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$ sont les erreurs extrêmes. Pour cela, on retranchera la première des équations (A) successivement des suivantes, et l'on aura cette suite d'é-

quations

$$(B)\quad \begin{cases} a^{(2)} - a^{(1)} - (p^{(2)} - p^{(1)})y = x^{(2)} - x^{(1)}, \\ a^{(3)} - a^{(1)} - (p^{(3)} - p^{(1)})y = x^{(3)} - x^{(1)}, \\ a^{(4)} - a^{(1)} - (p^{(4)} - p^{(1)})y = x^{(4)} - x^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Supposons y infini; les premiers membres de ces équations seront négatifs, et alors la valeur de $x^{(1)}$ sera plus grande que $x^{(2)}$, $x^{(3)}, \ldots$; en diminuant continuellement y, on arrivera enfin à une valeur qui rendra positif l'un de ces premiers membres, qui, avant d'arriver à cet état, deviendra nul. Pour connaître celui de ces membres qui le premier devient égal à zéro, on formera les quantités

$$\frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}}, \quad \frac{a^{(3)} - a^{(1)}}{p^{(3)} - p^{(1)}}, \quad \frac{a^{(4)} - a^{(1)}}{p^{(4)} - p^{(1)}}, \quad \ldots.$$

Nommons $6^{(1)}$ la plus grande de ces quantités, et supposons qu'elle soit $\frac{a^{(r)} - a^{(1)}}{p^{(r)} - p^{(1)}}$; s'il y a plusieurs valeurs égales à $6^{(1)}$, nous considérerons celle qui correspond au nombre r le plus grand. En substituant $6^{(1)}$ pour y dans la $(r-1)^{\text{ième}}$ des équations (B), $x^{(r)}$ sera égal à $x^{(1)}$, et, en diminuant y, il l'emportera sur $x^{(1)}$, le premier membre de cette équation devenant alors positif. Par les diminutions successives de y, ce membre croîtra plus rapidement que les premiers membres des équations qui la précèdent; ainsi, puisqu'il devient nul lorsque les précédents sont encore négatifs, il est visible que, dans les diminutions successives de y, il sera toujours plus grand qu'eux, ce qui prouve que $x^{(r)}$ sera constamment plus grand que $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(r-1)}$, lorsque y sera moindre que $6^{(1)}$.

Les premiers membres des équations (B) qui suivent la $(r-1)^{\text{ième}}$ seront d'abord négatifs, et, tant que cela aura lieu, $x^{(r+1)}$, $x^{(r+2)}, \ldots$ seront moindres que $x^{(1)}$, et par conséquent moindres que $x^{(r)}$, qui devient la plus grande de toutes les erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, lorsque y commence à devenir moindre que $6^{(1)}$. Mais, en continuant de diminuer y, on parvient à une valeur de cette variable, telle que quelques-

unes des erreurs $x^{(r+1)}$, $x^{(r+2)}$,... commencent à l'emporter sur $x^{(r)}$.

Pour déterminer cette valeur de y, on retranchera la $r^{\text{ième}}$ des équations (A) successivement des suivantes, et l'on aura

$$a^{(r+1)} - a^{(r)} - (p^{(r+1)} - p^{(r)})y = x^{(r+1)} - x^{(r)},$$
$$a^{(r+2)} - a^{(r)} - (p^{(r+2)} - p^{(r)})y = x^{(r+2)} - x^{(r)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on formera ensuite les quantités

$$\frac{a^{(r+1)} - a^{(r)}}{p^{(r+1)} - p^{(r)}}, \quad \frac{a^{(r+2)} - a^{(r)}}{p^{(r+2)} - p^{(r)}}, \quad \ldots.$$

Nommons $6^{(2)}$ la plus grande de ces quantités, et supposons qu'elle soit $\frac{a^{(r')} - a^{(r)}}{p^{(r')} - p^{(r)}}$; si plusieurs de ces quantités sont égales à $6^{(2)}$, nous supposerons que r' est le plus grand des nombres auxquels elles répondent. Cela posé, $x^{(r)}$ sera la plus grande des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,..., $x^{(n)}$, tant que y sera compris entre $6^{(1)}$ et $6^{(2)}$; mais lorsqu'en diminuant y on sera arrivé à $6^{(2)}$, alors $x^{(r')}$ commencera à l'emporter sur $x^{(r)}$ et à devenir la plus grande des erreurs.

Pour déterminer dans quelles limites, on formera les quantités

$$\frac{a^{(r'+1)} - a^{(r')}}{p^{(r'+1)} - p^{(r')}}, \quad \frac{a^{(r'+2)} - a^{(r')}}{p^{(r'+2)} - p^{(r')}}, \quad \ldots.$$

Soit $6^{(3)}$ la plus grande de ces quantités, et supposons qu'elle soit $\frac{a^{(r'')} - a^{(r')}}{p^{(r'')} - p^{(r')}}$; si plusieurs de ces quantités sont égales à $6^{(3)}$, nous supposerons que r'' est le plus grand des nombres auxquels elles répondent. $x^{(r')}$ sera la plus grande de toutes les erreurs depuis $y = 6^{(2)}$ jusqu'à $y = 6^{(3)}$. Lorsque $y = 6^{(3)}$, alors $x^{(r'')}$ commence à être cette plus grande erreur. En continuant ainsi, on formera les deux suites

$$\text{(C)} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} & x^{(1)}, & x^{(r)}, & x^{(r')}, & x^{(r'')}, & \ldots, & x^{(n)}, \\ \infty, & 6^{(1)}, & 6^{(2)}, & 6^{(3)}, & \ldots, & 6^{(q)}, & -\infty. \end{array} \right.$$

La première indique les erreurs $x^{(1)}$, $x^{(r)}$, $x^{(r')}$,... qui deviennent successivement les plus grandes; la seconde suite, formée de quantités

décroissantes, indique les limites de y entre lesquelles ces erreurs sont les plus grandes; ainsi $x^{(1)}$ est la plus grande erreur depuis $y = \infty$ jusqu'à $y = \beta^{(1)}$; $x^{(r)}$ est la plus grande erreur depuis $y = \beta^{(1)}$ jusqu'à $y = \beta^{(2)}$; $x^{(r')}$ est la plus grande erreur depuis $y = \beta^{(2)}$ jusqu'à $y = \beta^{(3)}$; ainsi de suite.

Reprenons maintenant les équations (B), et supposons y négatif et infini. Les premiers membres de ces équations seront positifs; $x^{(1)}$ sera donc alors la plus petite des erreurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$; en augmentant continuellement y, quelques-uns de ces membres deviendront négatifs, et alors $x^{(1)}$ cessera d'être la plus petite des erreurs. Si l'on applique ici le raisonnement que nous venons de faire pour le cas des plus grandes erreurs, on verra que, si l'on nomme $\lambda^{(1)}$ la plus petite des quantités

$$\frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}}, \quad \frac{a^{(3)} - a^{(1)}}{p^{(3)} - p^{(1)}}, \quad \frac{a^{(4)} - a^{(1)}}{p^{(4)} - p^{(1)}}, \quad \ldots,$$

et si l'on suppose qu'elle soit $\frac{a^{(s)} - a^{(1)}}{p^{(s)} - p^{(1)}}$, s étant le plus grand des nombres auxquels répond $\lambda^{(1)}$, si plusieurs de ces quantités sont égales à $\lambda^{(1)}$; $x^{(1)}$ sera la plus petite des erreurs depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = \lambda^{(1)}$. Pareillement, si l'on nomme $\lambda^{(2)}$ la plus petite des quantités

$$\frac{a^{(s+1)} - a^{(s)}}{p^{(s+1)} - p^{(s)}}, \quad \frac{a^{(s+2)} - a^{(s)}}{p^{(s+2)} - p^{(s)}}, \quad \ldots,$$

et que l'on suppose qu'elle soit $\frac{a^{(s')} - a^{(s)}}{p^{(s')} - p^{(s)}}$, s' étant le plus grand des nombres auxquels répond $\lambda^{(2)}$, si plusieurs de ces quantités sont égales à $\lambda^{(2)}$; $x^{(s)}$ sera la plus petite des erreurs depuis $y = \lambda^{(1)}$ jusqu'à $y = \lambda^{(2)}$, et ainsi du reste. On formera de cette manière les deux suites

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \quad x^{(1)}, \quad x^{(s)}, \quad x^{(s')}, \quad x^{(s'')}, \quad \ldots, \quad x^{(n)}, \\ -\infty, \quad \lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2)}, \quad \lambda^{(3)}, \quad \ldots, \quad \lambda^{(q')}, \quad \infty. \end{cases}$$

La première indique les erreurs $x^{(1)}, x^{(s)}, x^{(s')}, \ldots$ qui sont successivement les plus petites, à mesure que l'on augmente y; la seconde suite, formée de termes croissants, indique les limites des valeurs de y entre

lesquelles chacune de ces erreurs est la plus petite; ainsi $x^{(1)}$ est la plus petite des erreurs depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = \lambda^{(1)}$; $x^{(s)}$ est la plus petie des erreurs depuis $y = \lambda^{(1)}$ jusqu'à $y = \lambda^{(2)}$, et ainsi du reste. Cela posé,

La valeur de y qui appartient à l'ellipse cherchée sera l'une des quantités $6^{(1)}, 6^{(2)}, 6^{(3)}, \ldots, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$; elle sera dans la première suite, si les deux erreurs extrêmes de même signe sont positives. En effet, ces deux erreurs étant alors les plus grandes, elles sont dans la suite $x^{(1)}, x^{(r)}, x^{(r')}, \ldots$; et, puisqu'une même valeur de y les rend égales, elles doivent être consécutives, et la valeur de y qui leur convient ne peut être qu'une des quantités $6^{(1)}, 6^{(2)}, \ldots$, parce que deux de ces erreurs ne peuvent être à la fois rendues égales et les plus grandes que par l'une de ces quantités. Voici maintenant de quelle manière on déterminera celle des quantités $6^{(1)}, 6^{(2)}, \ldots$ qui doit être prise pour y.

Concevons, par exemple, que $6^{(3)}$ soit cette valeur; il doit alors se trouver, par ce qui précède, entre $x^{(r')}$ et $x^{(r'')}$, une erreur qui sera le minimum de toutes les erreurs, puisque $x^{(r')}$ et $x^{(r'')}$ seront les maxima de ces erreurs; ainsi, dans la suite $x^{(1)}, x^{(s)}, x^{(s')}, \ldots$, quelqu'un des nombres $s, s', \ldots$ sera compris entre r' et r''. Supposons que ce soit s. Pour que $x^{(s)}$ soit la plus petite des erreurs, la valeur de y doit être comprise depuis $\lambda^{(1)}$ jusqu'à $\lambda^{(2)}$; donc, si $6^{(3)}$ est compris dans ces limites, il sera la valeur cherchée de y, et il sera inutile d'en chercher d'autres. En effet, supposons que l'on retranche celle des équations (A) qui répond à $x^{(s)}$ successivement des deux équations qui répondent à $x^{(r')}$ et à $x^{(r'')}$; on aura

$$a^{(r')} - a^{(s)} - (p^{(r')} - p^{(s)})y = x^{(r')} - x^{(s)},$$
$$a^{(r'')} - a^{(s)} - (p^{(r'')} - p^{(s)})y = x^{(r'')} - x^{(s)}.$$

Tous les membres de ces équations étant positifs, en supposant $y = 6^{(3)}$, il est clair que, si l'on augmente y, la quantité $x^{(r')} - x^{(s)}$ augmentera; la somme des erreurs extrêmes, prise positivement, en sera donc augmentée. Si l'on diminue y, la quantité $x^{(r'')} - x^{(s)}$ en sera augmen-

tée, et par conséquent aussi la somme des erreurs extrêmes; $6^{(3)}$ est donc la valeur de y qui donne la plus petite de ces sommes, d'où il suit qu'elle est la seule qui satisfasse au problème.

On essayera de cette manière les valeurs de $6^{(1)}$, $6^{(2)}$, $6^{(3)}$,..., ce qui se fera très-aisément par leur seule inspection, et, si l'on arrive à une valeur qui remplisse les conditions précédentes, on sera sûr d'avoir la valeur cherchée de y.

Si aucune des valeurs de 6 ne remplit ces conditions, alors cette valeur de y sera quelqu'un des termes de la suite $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$,.... Concevons, par exemple, que ce soit $\lambda^{(2)}$; les deux erreurs extrêmes $x^{(s)}$ et $x^{(s')}$ seront alors négatives, et il y aura, par ce qui précède, une erreur intermédiaire, qui sera un maximum, et qui tombera, par conséquent, dans la suite $x^{(1)}$, $x^{(r)}$, $x^{(r')}$,.... Supposons que ce soit $x^{(r)}$, r étant alors nécessairement compris entre s et s'; $\lambda^{(2)}$ devra donc être compris entre $6^{(1)}$ et $6^{(2)}$. Si cela est, ce sera une preuve que $\lambda^{(2)}$ est la valeur cherchée de y. On essayera donc ainsi tous les termes de la suite $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, $\lambda^{(4)}$,..., jusqu'à ce que l'on arrive à un terme qui remplisse les conditions précédentes.

Lorsque l'on aura ainsi déterminé la valeur de y, on aura facilement celle de z. Pour cela, supposons que $6^{(2)}$ soit la valeur de y, et que les trois erreurs extrêmes soient $x^{(r)}$, $x^{(r')}$ et $x^{(s)}$; on aura $x^{(s)} = -x^{(r)}$, et par conséquent

$$a^{(r)} - z - p^{(r)}y = x^{(r)},$$

$$a^{(s)} - z - p^{(s)}y = -x^{(r)},$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{a^{(r)} + a^{(s)}}{2} - \frac{p^{(r)} + p^{(s)}}{2}y;$$

on aura ensuite la plus grande erreur $x^{(r)}$ au moyen de l'équation

$$x^{(r)} = \frac{a^{(r)} - a^{(s)}}{2} + \frac{p^{(s)} - p^{(r)}}{2}y.$$

40. L'ellipse déterminée dans le numéro précédent sert à reconnaître si l'hypothèse d'une figure elliptique est dans les limites des erreurs

des observations; mais elle n'est pas celle que les degrés mesurés indiquent avec le plus de vraisemblance. Cette dernière ellipse me paraît devoir remplir les conditions suivantes, savoir : 1° que la somme des erreurs commises dans les mesures des arcs entiers mesurés soit nulle; 2° que la somme de ces erreurs prises toutes positivement soit un minimum. En considérant ainsi les arcs entiers au lieu des degrés qui en ont été conclus, on donne à chacun de ces degrés d'autant plus d'influence sur l'ellipticité qui en résulte pour la Terre, que l'arc correspondant est plus considérable, comme cela doit être. Voici une méthode très-simple pour déterminer l'ellipse qui satisfait à ces deux conditions.

Reprenons les équations (A) du n° 39, et multiplions-les respectivement par les nombres qui expriment combien les arcs mesurés renferment de degrés, et que nous désignerons par $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$,.... Soit A la somme des quantités $i^{(1)}a^{(1)}$, $i^{(2)}a^{(2)}$,..., divisée par la somme des nombres $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$,...; soit pareillement P la somme des quantités $i^{(1)}p^{(1)}$, $i^{(2)}p^{(2)}$,..., divisée par la somme des nombres $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$,...; la condition que la somme des erreurs $i^{(1)}x^{(1)}$, $i^{(2)}x^{(2)}$,... est nulle donne

$$0 = A - z - Py.$$

Si l'on retranche cette équation de chacune des équations (A) du numéro précédent, on aura de nouvelles équations de la forme suivante :

$$(O)\quad \begin{cases} b^{(1)} - q^{(1)}y = x^{(1)}, \\ b^{(2)} - q^{(2)}y = x^{(2)}, \\ b^{(3)} - q^{(3)}y = x^{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Formons la suite des quotients $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}, \frac{b^{(2)}}{q^{(2)}}, \frac{b^{(3)}}{q^{(3)}}, \ldots$, et disposons-les suivant leur ordre de grandeur, en commençant par les plus grands; multiplions ensuite les équations (O) auxquelles ils répondent par les nombres correspondants $i^{(1)}$, $i^{(2)}$,...; disposons enfin ces équations ainsi multipliées dans le même ordre que ces quotients. Les premiers membres de ces équations disposées de cette manière formeront une suite

de termes de la forme

$$\text{(P)} \qquad h^{(1)}y - c^{(1)}, \quad h^{(2)}y - c^{(2)}, \quad h^{(3)}y - c^{(3)}, \quad \ldots,$$

dans lesquels nous supposerons $h^{(1)}$, $h^{(2)}$,... positifs, en changeant le signe des termes où y a un coefficient négatif. Ces termes sont les erreurs des arcs mesurés, prises positivement ou négativement. Cela posé,

Il est clair qu'en faisant y infini, chaque terme de cette suite devient infini; mais ils diminuent à mesure que l'on diminue y, et finissent par devenir négatifs, d'abord le premier, ensuite le second, et ainsi des autres. En diminuant toujours y, les termes une fois parvenus à être négatifs continuent de l'être, et diminuent sans cesse. Pour avoir la valeur de y qui rend la somme de ces termes, pris tous positivement, un minimum, on ajoutera les quantités $h^{(1)}$, $h^{(2)}$,..., jusqu'à ce que leur somme commence à surpasser la demi-somme entière de toutes ces quantités; ainsi, en nommant F cette somme, on déterminera r de manière que l'on ait

$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} + \ldots + h^{(r)} > \tfrac{1}{2}\text{F},$$
$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} + \ldots + h^{(r-1)} < \tfrac{1}{2}\text{F}.$$

On aura alors $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$, en sorte que l'erreur sera nulle, relativement au degré même qui correspond à celle des équations (O) dont le premier membre, égalé à zéro, donne cette valeur de y.

Pour le faire voir, supposons que l'on augmente y de la quantité δy, de manière que $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} + \delta y$ soit compris entre $\frac{c^{(r-1)}}{h^{(r-1)}}$ et $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$. Les $r-1$ premiers termes de la série (P) seront négatifs, comme dans le cas de $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$; mais, en les prenant avec le signe $+$, leur somme diminuera de la quantité

$$(h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(r-1)})\,\delta y.$$

Le $r^{\text{ième}}$ terme de cette suite, qui est nul lorsque $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$, deviendra

positif et égal à $h^{(r)}\delta y$; la somme de ce terme et des suivants, qui sont tous positifs, augmentera de la quantité

$$(h^{(r)} + h^{(r+1)} + \ldots)\,\delta y;$$

mais on a, par la supposition,

$$h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(r-1)} < h^{(r)} + h^{(r+1)} + \ldots;$$

la somme entière des termes de la suite (P), pris tous positivement, sera donc augmentée, et, comme elle est égale à la somme des erreurs $i^{(1)}x^{(1)}$, $i^{(2)}x^{(2)}, \ldots$ des arcs entiers mesurés, prises toutes avec le signe $+$, cette dernière somme sera augmentée par la supposition de $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} + \delta y$. Il est facile de s'assurer de la même manière qu'en augmentant y, en sorte qu'il soit compris entre $\frac{c^{(r-1)}}{h^{(r-1)}}$ et $\frac{c^{(r-2)}}{h^{(r-2)}}$, ou entre $\frac{c^{(r-2)}}{h^{(r-2)}}$ et $\frac{c^{(r-3)}}{h^{(r-3)}}, \ldots$, la somme des erreurs prises avec le signe $+$ sera plus grande que lorsque $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$.

Diminuons présentement y de la quantité δy, en sorte que $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} - \delta y$ soit compris entre $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ et $\frac{c^{(r+1)}}{h^{(r+1)}}$; la somme des termes négatifs de la série (P) augmentera, en changeant leur signe, de la quantité

$$(h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(r)})\,\delta y,$$

et la somme des termes positifs de la même série diminuera de la quantité

$$(h^{(r+1)} + h^{(r+2)} + \ldots)\,\delta y,$$

et, puisque l'on a

$$h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(r)} > h^{(r+1)} + h^{(r+2)} + \ldots,$$

il est clair que la somme entière des erreurs prises avec le signe $+$ sera augmentée. On verra de la même manière qu'en diminuant y, en

sorte qu'il soit entre $\frac{c^{(r+1)}}{h^{(r+1)}}$ et $\frac{c^{(r+2)}}{h^{(r+2)}}$, ou entre $\frac{c^{(r+2)}}{h^{(r+2)}}$ et $\frac{c^{(r+3)}}{h^{(r+3)}}, \ldots$, la somme des erreurs prises avec le signe $+$ est plus grande que lorsque $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$; cette valeur de y est donc celle qui rend cette somme un minimum.

La valeur de y donne celle de z au moyen de l'équation

$$z = A - Py.$$

L'analyse précédente étant fondée sur la variation des degrés de l'équateur aux pôles, proportionnelle au carré du sinus de la latitude, et cette loi de variation ayant également lieu pour la pesanteur, il est clair qu'elle s'applique aux observations sur la longueur du pendule à secondes.

41. Appliquons-la d'abord aux degrés déjà mesurés des méridiens terrestres. Parmi ces degrés, je considérerai les sept suivants, que j'évaluerai en parties de la règle à laquelle on a rapporté l'arc mesuré depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone, pour déterminer l'unité fondamentale des poids et mesures. Je désignerai par la lettre R cette règle, qui est le double de la toise dont Bouguer s'est servi au Pérou. J'exposerai ensuite la manière dont on a fixé le rapport de cette règle au mètre.

Le premier de ces degrés est celui du Pérou, à zéro de latitude. Sa longueur, suivant Bouguer, est de $25538^{R},85$; l'arc total mesuré d'où ce degré a été conclu est de $3^{\circ},4633$.

Le second est celui du Cap de Bonne-Espérance, mesuré par La Caille, et dont le milieu répond à la latitude de $37^{\circ},0093$. Sa longueur est de $25666^{R},65$; l'arc total mesuré d'où ce degré a été conclu est $1^{\circ},3572$.

Le troisième est celui de Pensylvanie, mesuré par Mason et Dixon. Son milieu répond à la latitude de $43^{\circ},5556$; sa longueur est de $25599^{R},60$; l'arc total mesuré est de $1^{\circ},6435$.

Le quatrième est celui d'Italie, mesuré par Boscovich et Maire. Son

milieu répond à la latitude de 47°, 7963; sa longueur est de 25640ᴿ,55; l'arc total mesuré est de 2°, 4034.

Le cinquième degré est celui de France, mesuré nouvellement par Delambre et Méchain. Son milieu répond à la latitude de 51°,3327; sa longueur est de 25658ᴿ,29; l'arc total mesuré est de 10°,7487.

Le sixième est celui d'Autriche, mesuré par Liesganig. Son milieu répond à la latitude de 53°,0926; sa longueur est de 25683ᴿ,30; l'arc total mesuré est de 3°,2734.

Le septième est celui de Laponie, mesuré par Clairaut, Maupertuis, Le Monnier, etc. Son milieu répond à la latitude de 73°,7037; en prenant une moyenne entre les diverses suites de triangles, et en ayant égard à la réfraction dans l'évaluation de l'arc céleste, je fixe sa longueur à 25832ᴿ,25; l'arc total mesuré est de 1°,0644.

Voici le tableau de ces degrés disposés suivant l'ordre des latitudes :

Latitudes.	Longueurs des degrés.
0°,0000	25538ᴿ,85
37,0093	25666,65
43,5556	25599,60
47,7963	25640,55
51,3327	25658,28
53,0926	25683,30
73,7037	25832,25

Les équations (A) du n° 39 deviennent donc ici

$$(A')\quad\left\{\begin{aligned}
&25538^{R},85 - z - y.0,00000 = x^{(1)},\\
&25666,65 - z - y.0,30156 = x^{(2)},\\
&25599,60 - z - y.0,39946 = x^{(3)},\\
&25640,55 - z - y.0,46541 = x^{(4)},\\
&25658,28 - z - y.0,52093 = x^{(5)},\\
&25683,30 - z - y.0,54850 = x^{(6)},\\
&25832,25 - z - y.0,83887 = x^{(7)}.
\end{aligned}\right.$$

Les deux suites (C) du même numéro deviennent

$$\begin{array}{cccc} & x^{(1)}, & x^{(2)}, & x^{(7)}, \\ \infty, & 423{,}796, & 308{,}202, & -\infty, \end{array}$$

et les deux suites (D) deviennent

$$\begin{array}{ccccc} & x^{(1)}, & x^{(3)}, & x^{(5)}, & x^{(7)}, \\ -\infty, & 152{,}080, & 483{,}087, & 547{,}176, & \infty. \end{array}$$

Il est facile d'en conclure, par le numéro cité, $y = 308^{R},202$, ce qui donne $\frac{1}{277}$ pour l'ellipticité de la Terre. On a ensuite

$$x^{(2)} = x^{(7)} = -x^{(3)} = 48^{R},60.$$

Ainsi, de quelque manière que l'on combine les sept degrés précédents, quelque rapport que l'on choisisse pour celui des axes de la Terre, il est impossible d'éviter dans l'ellipse une erreur de $48^{R},60$ dans les mesures de quelques-uns des degrés précédents; et comme cette erreur, étant la limite de celles qui peuvent être admises, est, par cela même, infiniment peu probable, il faudrait, dans la supposition d'une figure elliptique, admettre des erreurs encore plus grandes que $48^{R},60$. Or, en examinant avec attention les mesures de ces degrés, il paraît difficile de supposer à la fois que, dans chacun des degrés de Pensylvanie, du Cap de Bonne-Espérance et de Laponie, sur lesquels tombent les trois plus grandes erreurs, il s'est glissé une erreur de $48^{R},60$; il semble donc résulter des erreurs précédentes que la variation des degrés des méridiens terrestres s'écarte sensiblement de la loi du carré des sinus de la latitude, que donne l'hypothèse des méridiens elliptiques.

Déterminons cependant l'ellipse la plus probable qui résulte de ces mesures. En multipliant les équations (A′) respectivement par les nombres $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$, ... de degrés que renferment les arcs mesurés qui leur correspondent, et divisant leur somme par $i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)} + \ldots$, la condition que la somme des erreurs $i^{(1)}x^{(1)} + i^{(2)}x^{(2)} + \ldots$ est nulle donne

$$0 = 25646^{R},80 - z - y.0,43717;$$

les équations (O) du numéro précédent deviennent ainsi

$$
(\mathrm{O}')\quad \left\{\begin{aligned}
-107^{\mathrm{R}},95+y.0,43717&=x^{(1)},\\
19,85+y.0,13561&=x^{(2)},\\
-\ 47,20+y.0,03771&=x^{(3)},\\
-\ \ 6,25-y.0,02824&=x^{(4)},\\
11,48-y.0,08376&=x^{(5)},\\
36,50-y.0,11133&=x^{(6)},\\
185,45-y.0,40170&=x^{(7)}.
\end{aligned}\right.
$$

De là il est facile de conclure que la suite des quantités $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)},\ldots$, disposées suivant l'ordre de grandeur des quotients $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}, \frac{b^{(2)}}{q^{(2)}},\ldots$, est

0,06198, 0,42757, 0,36443, 1,51405, 0,90031, 0,18405, 0,06787.

Les équations (O′) leur correspondent dans l'ordre 3, 7, 6, 1, 5, 2, 4: la somme des trois premières quantités est plus petite que la demi-somme de toutes ces quantités, et la somme des quatre premières la surpasse; on a donc $x^{(1)}=0$, ce qui donne $y=246,93$, et par conséquent $z=25538^{\mathrm{R}},85$; en sorte que l'expression du degré du méridien est $25538^{\mathrm{R}},85+246^{\mathrm{R}},93.\sin^2\theta$, θ étant la latitude, d'où résulte $\frac{1}{312}$ pour l'aplatissement de la Terre. Cette expression donne $86^{\mathrm{R}},26$ pour l'erreur du degré de Laponie, erreur beaucoup trop grande pour être admise; ce qui confirme ce que nous avons dit, savoir, que la Terre s'écarte sensiblement de la figure elliptique.

Les opérations faites nouvellement par Delambre et Méchain, pour la mesure de l'arc du méridien terrestre compris entre Dunkerque et Barcelone, ne laissent, vu leur grande précision, aucun doute à cet égard. Voici les principaux résultats de ces opérations.

Latitudes.		Distances au parallèle de Montjoui, des parallèles de	
Montjoui..........	45°,958281		
Carcassonne.......	48,016790	Carcassonne.......	52749R,48
Évaux............	51,309414	Évaux............	137174,03
Panthéon à Paris...	54,274614	Panthéon.........	213319,77
Dunkerque........	56,706944	Dunkerque........	275792,36

Maintenant, soient $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ et $a^{(5)}$ ces distances; $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$, $\theta^{(4)}$, $\theta^{(5)}$ les latitudes, et $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$ les erreurs dont ces latitudes sont susceptibles, et que l'on peut attribuer soit aux observations mêmes de la hauteur du pôle, soit aux mesures géodésiques dont les erreurs influent sur les latitudes des parallèles supposés distants de celui de Montjoui des intervalles $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, ... L'arc terrestre compris entre l'équateur et le parallèle de Montjoui est à très-peu près, par ce qui précède,

$$s(\theta^{(1)} + x^{(1)} - \tfrac{3}{4}\rho \sin 2\theta^{(1)}),$$

s étant la grandeur du degré moyen, et ρ étant l'aplatissement de la Terre réduit en degrés. L'arc compris entre l'équateur et le parallèle de Carcassonne sera

$$s(\theta^{(2)} + x^{(2)} - \tfrac{3}{4}\rho \sin 2\theta^{(2)});$$

l'arc compris entre les deux parallèles de Carcassonne et de Montjoui sera donc

$$s[\theta^{(2)} - \theta^{(1)} + x^{(2)} - x^{(1)} - \tfrac{3}{4}\rho(\sin 2\theta^{(2)} - \sin 2\theta^{(1)})].$$

En l'égalant à $a^{(2)}$, on aura

$$\theta^{(2)} - \theta^{(1)} + x^{(2)} - x^{(1)} - \tfrac{3}{2}\rho \sin(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) \cos(\theta^{(2)} + \theta^{(1)}) = \frac{a^{(2)}}{s}.$$

Les parallèles des autres lieux, comparés à celui de Montjoui, donnent trois équations semblables. En substituant ensuite les nombres correspondants, on aura les quatre équations suivantes

$$(\text{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} &2^\circ{,}0585o9 + x^{(2)} - x^{(1)} - \rho.0{,}0045829 = \frac{52749^{\text{m}}{,}48}{s}, \\ &5^\circ{,}351133 + x^{(3)} - x^{(1)} - \rho.0{,}0054036 = \frac{137174^{\text{m}}{,}03}{s}, \\ &8^\circ{,}316333 + x^{(4)} - x^{(1)} + \rho.0{,}0007152 = \frac{213319^{\text{m}}{,}77}{s}, \\ &10^\circ{,}748663 + x^{(5)} - x^{(1)} + \rho.0{,}0105491 = \frac{275792^{\text{m}}{,}36}{s}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on applique à ces équations la première méthode que nous avons

donnée au commencement du n° 39, on trouve que, dans l'hypothèse elliptique qui donne un minimum pour la plus grande erreur, on a

$$x^{(1)} = x^{(4)} = -x^{(3)} = -x^{(5)} = 4'',43, \qquad x^{(2)} = 3'',99,$$

l'aplatissement $\rho = \frac{1}{150,6}$, et le degré correspondant au parallèle moyen égal à 25649^{R},8. Les observations ont été faites avec tant de précision qu'elles ne sont pas susceptibles des erreurs précédentes, quoique fort petites; il paraît donc qu'on doit les attribuer, au moins en partie, à des causes qui écartent la figure de la Terre de celle d'un ellipsoïde. Mais ce qui le prouve incontestablement, c'est l'aplatissement $\frac{1}{150,6}$ que l'ensemble de ces erreurs donne à la Terre, aplatissement qui ne peut subsister ni avec les phénomènes de la pesanteur, ni avec ceux de la précession et de la nutation: car ces phénomènes ne permettent pas de supposer à la Terre un aplatissement plus grand que dans le cas de l'homogénéité, ou au-dessus de $\frac{1}{230}$.

Si dans les équations (B) on fait $\rho = \frac{1}{230}$, ou, en degrés, $\rho = 0°,27691$, et si l'on suppose

$$s = \frac{10000}{1°.y},$$

elles donnent les suivantes

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{0},000000 - z - y.\ \overset{\circ}{0},000000 &= -x^{(1)},\\
2,057240 - z - y.\ 5,274948 &= -x^{(2)},\\
5,349637 - z - y.13,717403 &= -x^{(3)},\\
8,316531 - z - y.21,331977 &= -x^{(4)},\\
10,751583 - z - y.27,579236 &= -x^{(5)}.
\end{aligned}$$

Ces équations rentrent dans les équations (A) du n° 39, avec la seule différence du signe des erreurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,.... En y appliquant la seconde méthode exposée dans ce numéro, les deux suites (C) du même numéro deviennent

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & -x^{(1)}, & & -x^{(2)}, & & -x^{(3)}, & & -x^{(5)}, & \\
\infty, & & 0°,390002, & & 0°,389981, & & 0°,389699, & & -\infty,
\end{array}$$

et les deux suites (D) deviennent

$$\begin{array}{ccccc} & -x^{(1)}, & & -x^{(5)}, & \\ -\infty, & & 0^{\circ},389843, & & \infty, \end{array}$$

d'où l'on tire

$$-x^{(1)} = -x^{(5)} = x^{(3)} = -9'',98,$$

$$y = 0,389843,$$

et le degré sur le parallèle de 50° égal à 25651ᴿ,33.

Une erreur de 9'',98 est beaucoup trop grande pour être admise; ainsi l'aplatissement $\frac{1}{230}$ et, à plus forte raison, des aplatissements moindres, ne peuvent pas se concilier avec les mesures précédentes; il est donc bien prouvé que la Terre s'éloigne très-sensiblement d'une figure elliptique. Mais il est très-remarquable que les mesures faites nouvellement en France et en Angleterre, avec une grande précision, dans le sens des méridiens et dans le sens perpendiculaire aux méridiens, se réunissent à indiquer un ellipsoïde osculateur dont l'ellipticité est $\frac{1}{150}$, et le degré moyen est égal à 25649ᴿ,8.

Pour représenter avec ces données les mesures des degrés entre Dunkerque et le Panthéon, le Panthéon et Évaux, Évaux et Carcassonne, enfin Carcassonne et Montjoui, il ne faut qu'altérer d'environ 4'',4 les latitudes observées. Le degré perpendiculaire au méridien, à la latitude de 56°,3144, devient 25837ᴿ,6, et, par des opérations très-exactes faites en Angleterre, on l'a trouvé de 25833ᴿ,4. Il paraît donc, par cet accord, que l'aplatissement considérable de l'ellipsoïde osculateur en France ne dépend point des attractions des Pyrénées et des autres montagnes situées au midi de la France; il tient à des attractions beaucoup plus étendues, dont l'effet est sensible au nord de la France et même en Angleterre, comme en Autriche et en Italie; car tous les degrés mesurés dans cette partie de la surface de la Terre sont, à 8ᴿ ou 9ᴿ près, représentés par l'ellipsoïde osculateur dont on vient de parler.

Il paraît encore, par les diverses observations azimutales faites sur l'arc du méridien terrestre, depuis Dunkerque jusqu'à Montjoui, que

l'ellipsoïde osculateur n'est pas exactement un solide de révolution. En appliquant à ces observations les formules du n° 38 et les méthodes précédentes, on pourra déterminer l'ellipsoïde osculateur qui satisfait à la fois aux observations des azimuts et des latitudes. Nous nous bornerons ici à remarquer que la mesure d'une perpendiculaire à la méridienne de l'Observatoire, faite dans la plus grande largeur de la France, par les moyens que l'on vient d'employer dans la mesure de la méridienne, en observant sur plusieurs points les azimuts et les latitudes, fournirait sur l'excentricité de cet ellipsoïde, dans le sens des parallèles, des données beaucoup plus certaines, et qu'il est par conséquent à désirer que l'on ajoute cette nouvelle mesure à la précédente. Les observations azimutales que l'on a déjà faites prouvent que les méridiens ne sont point semblables, et, si l'on compare le degré du Cap de Bonne-Espérance aux degrés mesurés dans l'hémisphère boréal de la Terre, il y a lieu de croire que les deux hémisphères, boréal et austral, sont différents entre eux. La figure de la Terre est donc très-composée, comme il est naturel de le penser, lorsque l'on fait attention aux grandes inégalités de sa surface, à la différente densité des parties qui la recouvrent, et aux irrégularités du contour et de la profondeur des mers.

Pour conclure la grandeur du quart du méridien terrestre de l'arc compris entre Dunkerque et Montjoui, il faut adopter une hypothèse sur la figure de la Terre, et, au milieu des irrégularités que cette figure présente, l'hypothèse la plus naturelle et la plus simple est celle d'un ellipsoïde de révolution. En partant de cette hypothèse, le quart du méridien serait à très-peu près égal à cent fois l'arc mesuré entre Dunkerque et Montjoui, divisé par le nombre de ses degrés, si son milieu correspondait à 50° de latitude; mais il est un peu plus au nord : il en résulte, dans la longueur du quart du méridien, une petite correction qui dépend de l'aplatissement de la Terre. On a choisi l'ellipticité que donne la comparaison de l'arc mesuré en France avec l'arc mesuré à l'équateur, et qui, par sa position et son éloignement, par son étendue et par les soins que plusieurs excellents observateurs ont

apportés à sa mesure, doit être préféré pour cet objet. L'ellipticité que cette comparaison donne est $\frac{1}{334}$; le quart du méridien, conclu de l'arc mesuré entre Dunkerque et Montjoui, est ainsi égal à 2565370^{B}. Le *mètre* étant la dix-millionième partie de cette longueur, est par conséquent $0^{R},256537$, ou $0^{toise},513074$, la toise étant celle qui a servi à la mesure de la Terre au Pérou, rapportée à la température de 16 degrés et un quart du thermomètre à mercure divisé en 100 degrés, depuis la température de la glace fondante jusqu'à celle de l'eau bouillante sous une pression équivalente à celle d'une colonne de mercure de 76 centimètres de hauteur. Au moyen de cette valeur, il sera facile de traduire en mètres toutes les mesures précédentes, et généralement celles qui sont exprimées en toises.

Quelle que soit la figure de la Terre, on voit par les observations que, dans chaque hémisphère, les degrés vont en diminuant des pôles à l'équateur, ce qui exige une augmentation correspondante dans les rayons terrestres, et par conséquent un aplatissement dans le sens des pôles. Pour le faire voir, concevons, pour plus de simplicité, que la Terre soit un sphéroïde de révolution : le rayon osculateur du méridien, au pôle, sera dirigé suivant l'axe de révolution; ensuite il diminuera sans cesse, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à l'axe, et alors il sera dans le plan de l'équateur. Ces divers rayons forment, par leur intersection commune, la développée du méridien terrestre, dont les deux tangentes extrêmes sont la première dans l'axe du pôle, et la seconde dans l'axe de l'équateur. Nommons a et a' ces deux tangentes, prises depuis l'intersection de l'axe du pôle avec le diamètre de l'équateur, intersection que nous prendrons pour le centre de la Terre. Nommons encore R et R′ les rayons osculateurs du méridien au pôle boréal et à l'équateur, et r et r' les rayons menés du centre de la Terre à ces deux points. Nous aurons évidemment $r = \mathrm{R} - a$, $r' = \mathrm{R}' + a'$, d'où l'on tire

$$r' - r = a + a' - (\mathrm{R} - \mathrm{R}').$$

La développée est convexe vers l'axe du pôle, puisque les rayons oscu-

lateurs et les degrés du méridien vont en diminuant des pôles à l'équateur; de plus, l'arc entier de la développée est moindre que la somme $a+a'$ de ses deux tangentes extrêmes; or $R-R'$ est égal à cet arc; $r'-r$ est donc une quantité positive. Si l'on nomme r'' le rayon mené du centre de la Terre au pôle austral, on verra de la même manière que $r'-r''$ est positif; $2r'$ est donc plus grand que $r+r''$, c'est-à-dire que le diamètre de l'équateur est plus grand que l'axe des pôles, ou, ce qui revient au même, la Terre est aplatie dans le sens des pôles.

Si l'on considère un arc infiniment petit du méridien comme un arc de cercle, et si l'on conçoit tracée la circonférence dont cet arc fait partie, l'extrémité de l'arc la plus voisine du pôle sera plus près que l'autre extrémité du point de la circonférence le plus voisin du centre de la Terre, d'où il est facile de conclure que le rayon terrestre mené à la première extrémité est moindre que le rayon mené à la seconde extrémité, c'est-à-dire que les rayons terrestres vont en augmentant des pôles à l'équateur.

$a+a'$ est moindre que $2(R-R')$; ainsi $r'-r$ est plus petit que $R-R'$; la différence des rayons terrestres du pôle et de l'équateur est donc moindre que la différence des rayons osculateurs correspondants, en sorte que les degrés des méridiens croissent de l'équateur aux pôles dans un plus grand rapport que celui suivant lequel les rayons terrestres diminuent. Il est facile d'étendre les mêmes raisonnements au cas où la Terre ne serait point un solide de révolution.

42. Considérons présentement les longueurs observées du pendule à secondes. Parmi ces longueurs, je choisirai les quinze suivantes : les deux premières ont été déterminées par Bouguer, l'une à l'équateur au Pérou, l'autre à Portobello; la troisième a été déterminée par Le Gentil à Pondichéry; la quatrième a été conclue de celle de Londres par la comparaison des oscillations d'un pendule invariable transporté de Londres à la Jamaïque par Campbell; la cinquième a été déterminée par Bouguer, au Petit-Goave; la sixième par La Caille au Cap de Bonne-Espérance; la septième par Darquier à Toulouse; la huitième par Lies-

ganig à Vienne en Autriche; la neuvième à Paris par Bouguer; la dixième à Gotha par Zach; la onzième a été conclue de celle de Paris par la différence des oscillations d'un pendule invariable transporté de Londres à Paris; la douzième et la quatorzième ont été conclues de la même manière de celle de Paris, par les observations de Mallet, à Pétersbourg et à Ponoï; la treizième a été semblablement conclue de celle de Paris, par Grischow, à Arensberg; enfin, la quinzième a été déterminée suivant le même procédé, par les académiciens français qui ont mesuré le degré du méridien en Laponie.

Les neuf mesures absolues ont l'avantage d'avoir été faites suivant la même méthode, qui consiste à observer les oscillations d'un poids suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil de pite très-mince, d'un mètre environ de longueur, et saisi par une pince à son extrémité supérieure. Toutes ces mesures peuvent être considérées comme ayant été prises au niveau des mers. Je les ai réduites au vide et à la même température; ainsi, dans le cas même où elles laisseraient quelque incertitude sur la longueur absolue du pendule à secondes, l'uniformité de la méthode doit donner avec précision la loi des variations de cette longueur, l'un des principaux objets à connaître. Les huit autres mesures ont été conclues par la comparaison d'un pendule invariable observé à Paris, et transporté dans les lieux correspondants à ces mesures.

C'est à la longueur du pendule observée à Paris par Bouguer, et prise pour unité, que j'ai rapporté les autres, qui expriment encore les rapports des poids d'un même corps, transporté successivement dans ces divers lieux, à son poids à Paris, pris pour unité de poids.

Latitudes.	Longueurs du pendule à secondes.
°	
0,00	0,99669
10,61	0,99689
13,25	0,99710
20,00	0,99745
20,50	0,99728
37,69	0,99877
48,44	0,99950

Latitudes.	Longueurs du pendule à secondes.
53°,57	0,99987
54,26	1,00000
56,63	1,00006
57,22	1,00018
64,72	1,00074
66,60	1,00101
74,22	1,00137
74,53	1,00148

Les équations (A) du n° 39 deviennent donc ici (*)

$$
(A'')\quad \left\{
\begin{aligned}
&0,99669 - z - y.0,00000 = x^{(1)},\\
&0,99689 - z - y.0,02752 = x^{(2)},\\
&0,99710 - z - y.0,04270 = x^{(3)},\\
&0,99745 - z - y.0,09549 = x^{(4)},\\
&0,99728 - z - y.0,10016 = x^{(5)},\\
&0,99877 - z - y.0,31142 = x^{(6)},\\
&0,99950 - z - y.0,47551 = x^{(7)},\\
&0,99987 - z - y.0,55596 = x^{(8)},\\
&1,00000 - z - y.0,56672 = x^{(9)},\\
&1,00006 - z - y.0,57624 = x^{(10)},\\
&1,00018 - z - y.0,61244 = x^{(11)},\\
&1,00074 - z - y.0,723307 = x^{(12)},\\
&1,00101 - z - y.0,74909 = x^{(13)},\\
&1,00137 - z - y.0,84478 = x^{(14)},\\
&1,00148 - z - y.0,84829 = x^{(15)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux suites (C) du même numéro deviennent

$x^{(1)}$,	$x^{(3)}$,	$x^{(4)}$,	$x^{(6)}$,	$x^{(13)}$,	$x^{(15)}$,	....
∞,	-0.0096019,	$+0,0066304$,	$-0,0061131$,	$+0,0051181$,	$-0,0047379$,	$-\infty$,

(*) Les calculs qui suivent, jusqu'à la fin du n° 42, ont été réimprimés ici tels qu'on les lit dans l'édition princeps. On croit cependant devoir avertir qu'il s'y est glissé des fautes qui affectent notablement les conclusions de l'Auteur. C'est ainsi que le coefficient 0,57624 de $-y$, dans la dixième des équations (A''), doit être remplacé par 0,60339. On peut consulter, au sujet de ces erreurs, l'édition de Bowditch. (*Note de l'Editeur.*)

et les deux suites (D) deviennent

$$\begin{array}{cccc} x^{(1)}, & x^{(14)}, & x^{(15)}, & \ldots, \\ -\infty, & +0,0055399, & +0,0313390, & +\infty. \end{array}$$

Il est facile d'en conclure, par le numéro cité, que $y = 0,0055399$. On trouve ensuite

$$x^{(6)} = -x^{(1)} = -x^{(14)} = 0,00018,$$
$$z = 0,99687.$$

Ainsi, de quelque manière que l'on combine les quinze mesures précédentes, on ne peut éviter une erreur moindre que 0,00018, dans l'hypothèse où les variations de la pesanteur croissent de l'équateur aux pôles proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Cette erreur est dans les limites de celles dont ces mesures sont susceptibles, et l'on voit qu'elle est beaucoup moindre que l'erreur correspondante des mesures des degrés des méridiens, ce qui confirme ce que la théorie nous a indiqué dans le n° 33, savoir, que les termes de l'expression du rayon terrestre qui écartent la figure de la Terre de l'hypothèse elliptique sont beaucoup moins sensibles dans la longueur du pendule à secondes que dans la grandeur des degrés des méridiens.

On a vu, dans le n° 34, qu'en partant de l'hypothèse elliptique, l'ellipticité de la Terre est égale à cinq demis du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, moins la valeur de y : ce rapport est $\frac{1}{289}$; l'ellipticité est donc égale à $0,00865 - y$: en substituant pour y sa valeur précédente, on a $\frac{1}{321,48}$ pour l'ellipticité de la Terre, qui rend un minimum la plus grande erreur des mesures précédentes.

Déterminons par la méthode du n° 40 l'ellipse la plus vraisemblable qui résulte de ces mesures. Si l'on ajoute les équations (A″), et que l'on divise leur somme par 15, on aura

$$0 = 0,99923 - z - y.0,43529;$$

c'est l'équation de condition nécessaire pour que la somme des erreurs

soit nulle. Les équations (O) du n° 40 deviendront ainsi

$$
(\mathrm{O}'')\quad
\left\{
\begin{array}{l}
-0,00254+y.0,43529=x^{(1)},\\
-0,00234+y.0,40777=x^{(2)},\\
-0,00213+y.0,39259=x^{(3)},\\
-0,00178+y.0,33980=x^{(4)},\\
-0,00195+y.0,33513=x^{(5)},\\
-0,00046+y.0,12387=x^{(6)},\\
0,00027-y.0,04022=x^{(7)},\\
0,00064-y.0,12067=x^{(8)},\\
0,00077-y.0,13143=x^{(9)},\\
0,00083-y.0,14095=x^{(10)},\\
0,00095-y.0,17715=x^{(11)},\\
0,00151-y.0,28778=x^{(12)},\\
0,00178-y.0,31380=x^{(13)},\\
0,00214-y.0,40949=x^{(14)},\\
0,00225-y.0,41300=x^{(15)}.
\end{array}
\right.
$$

De là il est facile de conclure que la suite des quantités $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$,... du n° 40 est

0,0067131,	0,0058886,	0,0058586,	0,0058352,	0,0058186,
0,0057385,	0,0056724,	0,0054479,	0,0054255,	0,0053627,
0,0053037,	0,0052471,	0,0052384,	0,0052260,	0,0037136.

Les équations (O″) leur correspondent dans l'ordre 7, 10, 9, 1, 5, 2, 13, 15, 3, 11, 8, 12, 4, 14, 6; la somme des six premières est plus petite que la demi-somme de toutes ces quantités, et la somme des sept premières surpasse cette demi-somme; la septième quantité répond à la treizième des équations (A″); on a donc, par le n° 40, $x^{(13)}=0$, et par conséquent

$$y=0,0056724,\qquad z=0,99676,$$

ce qui donne $\frac{1}{335,78}$ pour l'ellipticité de la Terre. Cela s'accorde d'une manière remarquable avec l'ellipticité conclue des mesures de France et de l'équateur. Il paraît donc, par les observations du pendule, que la Terre est beaucoup moins aplatie que dans le cas de l'homogénéité,

et que le rapport de ses axes ne peut pas être supposé plus grand que celui de 320 à 321, qui donne les plus petites erreurs dans les longueurs précédentes. L'ellipse la plus vraisemblable qui résulte de ces observations est celle dont les axes sont dans le rapport de 335 à 336 : l'expression de la longueur du pendule est alors, par ce qui précède,

$$(e) \qquad 0,99676 + 0,0056724 . \sin^2\psi,$$

ψ étant la latitude.

Il ne s'agit plus que de multiplier cette expression par la longueur absolue du pendule à l'équateur, divisée par 0,99676, pour avoir sa longueur absolue dans un lieu quelconque dont la latitude est ψ. Bouguer a trouvé cette longueur absolue à l'équateur égale à $0^{m},739615$; mais il y a lieu de penser que sa méthode donne au pendule une trop grande longueur, parce qu'à raison de l'épaisseur du fil et de la petite résistance qu'il oppose à sa flexion, le centre des oscillations doit être un peu au-dessous du point de suspension. Borda, qui a déterminé par un moyen très-précis la longueur du pendule à secondes à l'Observatoire de Paris, l'a trouvée égale à $0^{m},741887$. En la divisant par $0,99676 + 0,0056724 . \sin^2\psi$, ψ étant ici la latitude de l'Observatoire, on a $0^{m},741905$; c'est le facteur par lequel on doit multiplier la formule (e), qui donne ainsi la longueur absolue du pendule dans un lieu quelconque, égale à $0^{m},739502 + 0^{m},004208 . \sin^2\psi$.

Nous remarquerons ici que les mêmes anomalies que présentent les divers degrés mesurés depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone, et dont la cause est sans doute l'irrégularité des parties de la Terre, se retrouvent dans les longueurs observées du pendule; car Grischow a observé à Pétersbourg et à Arensberg, sous des latitudes très-peu différentes entre elles, des variations dans ces longueurs, sensiblement plus grandes que celles qui résultent de la loi précédente de la variation du pendule de l'équateur aux pôles.

Ces anomalies de la variation de la pesanteur disparaissent à très-peu près à de grandes distances, pour ne laisser apercevoir que la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude. On a vu,

dans le n° 33, que, l'expression du rayon terrestre étant

$$1 + \alpha(Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots),$$

l'expression de la longueur du pendule à secondes est

$$L + \alpha L(Y^{(2)} + 2Y^{(3)} + 3Y^{(4)} + \ldots) + \tfrac{5}{2}\alpha\varphi L(\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

ainsi, les observations de la longueur du pendule donnant cette longueur à très-peu près proportionnelle à μ^2, $Y^{(2)}$ est à très-peu près égal à $-h(\mu^2 - \frac{1}{3})$. La Terre tournant autour d'un de ses axes principaux, $Y^{(2)}$ doit être, par le n° 32, de la forme

$$-h(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + h^{\text{iv}}(1 - \mu^2)\cos 2\varpi;$$

les observations sur le pendule nous montrent donc que h^{iv} est très-petit relativement à h; elles nous apprennent encore que $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, ... sont très-petits par rapport à $Y^{(2)}$, et qu'ainsi on peut les négliger dans l'expression du rayon terrestre, et même dans celles de la pesanteur et de la parallaxe; mais, en même temps, les diverses mesures des degrés des méridiens indiquent que ces termes deviennent sensibles dans l'expression de ces degrés, à raison de la grandeur des coefficients qui les multiplient dans cette expression.

43. Considérons présentement Jupiter, dont l'aplatissement très-sensible a été déterminé avec exactitude. Si l'on suppose d'abord cette planète homogène, on déterminera son ellipticité par l'équation (2) du n° 18,

$$0 = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \operatorname{arc\,tang}\lambda,$$

$\sqrt{1 + \lambda^2}$ étant le rapport de l'axe de l'équateur à celui du pôle. Pour conclure λ de cette équation, il faut déterminer q; or, en nommant D la distance du quatrième satellite de Jupiter à son centre, et T la durée de sa rotation exprimée en parties du jour, la force centrifuge de ce

satellite sera égale à la masse M de Jupiter divisée par D^2. Mais cette force centrifuge est à la force centrifuge g due à la rotation de Jupiter et considérée à la distance 1 de l'axe de rotation comme $\frac{D}{T^2}$ est à $\frac{1}{t^2}$, t étant la durée de la rotation de Jupiter exprimée en fraction de jour; on a donc

$$g = \frac{MT^2}{t^2 D^3}.$$

On a, par le n° 19, $M = \frac{4}{3}\pi k^3(1+\lambda^2)$; partant,

$$\frac{g}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{k^3(1+\lambda^2)T^2}{t^2 D^3} = q.$$

Nous supposerons avec Newton, d'après les mesures de Pound, la distance du quatrième satellite égale à 26,63 demi-diamètres de l'équateur de la planète, ce qui donne $\frac{k\sqrt{1+\lambda^2}}{D} = \frac{1}{26,63}$; on a ensuite

$$t = 0^{\text{jour}},41377, \qquad T = 16^{\text{jours}},68902;$$

on aura donc

$$q = 0,0861450(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'équation en λ devient

$$0 = 9\lambda + \frac{0,172290.\lambda^3}{\sqrt{1+\lambda^2}} - (9+3\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda,$$

d'où l'on tire $\lambda = 0,481$, et par conséquent, l'axe du pôle étant pris pour l'unité, l'axe de l'équateur est 1,10967.

Suivant les observations de Pound, rapportées par Newton, l'axe de l'équateur de Jupiter est 1,0771; Short a trouvé, par ses observations, cet axe égal à 1,0769; enfin, par les mouvements des nœuds et des périjoves des satellites de Jupiter, on trouve 1,0747 pour ce même axe, qui, comme on le verra dans la théorie des satellites de Jupiter, est déterminé par ce moyen avec beaucoup plus de précision que par les

mesures directes. Ces divers résultats concourent à faire voir que Jupiter est moins aplati que dans le cas de l'homogénéité, et qu'ainsi sa densité croît, comme celle de la Terre, de la surface au centre.

On a vu dans le n° 30 que, si les planètes ont été primitivement fluides, comme il est naturel de le supposer, les limites de leur ellipticité sont $\frac{5}{4}\alpha\varphi$ et $\frac{1}{2}\alpha\varphi$, en sorte que, l'axe du pôle étant 1, l'axe de l'équateur est compris entre $1+\frac{5}{4}\alpha\varphi$ et $1+\frac{1}{2}\alpha\varphi$, la première de ces limites répondant au cas de l'homogénéité; et comme cette limite est, par ce qui précède, 1,10967, on a $\frac{5}{4}\alpha\varphi = 0,10967$, ce qui donne 1,10967 et 1,04387 pour les deux limites entre lesquelles l'axe de l'équateur doit être compris; or les axes précédents, donnés soit par les mesures directes, soit par le mouvement des nœuds des orbes des satellites de Jupiter, sont renfermés dans ces limites; ainsi la théorie de la pesanteur est sur ce point parfaitement d'accord avec les observations.

Il suit encore du n° 30 que si, Jupiter et la Terre étant supposés fluides, leurs densités respectives à des distances de leurs centres proportionnelles à leurs diamètres sont dans un rapport constant, la loi de leurs ellipticités sera la même; et, l'ellipticité étant l'excès de l'axe de l'équateur sur celui du pôle pris pour unité, le rapport des ellipticités de Jupiter et de la Terre sera le même, quelle que soit la loi des densités. Or, dans le cas de l'homogénéité, les ellipticités sont, par ce qui précède et par le n° 19, comme 0,10967 est à 0,00433441; en supposant donc l'ellipticité de Jupiter égale à 0,0747, telle que la donne le mouvement des nœuds de ses satellites, on aura $\frac{1}{338,72}$ pour l'ellipticité de la Terre, correspondante à la même loi de densité. Cette ellipticité serait $\frac{1}{328,17}$, si l'on adoptait l'ellipticité de Jupiter qui résulte des mesures de Pound. Ces divers résultats sont d'accord avec ceux que nous ont donnés les observations du pendule; ainsi l'analogie de Jupiter avec la Terre concourt avec ces observations pour nous faire voir que l'aplatissement du sphéroïde terrestre est au-dessous de $\frac{1}{230}$, et même au-dessous de $\frac{1}{300}$: on verra dans le cinquième Livre ce résul-

tat confirmé par les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre.

Nous traiterons de la figure de la Lune dans le cinquième Livre, en considérant les mouvements du sphéroïde lunaire autour de son centre de gravité, les seuls phénomènes qui nous donnent quelques lumières sur cette figure, trop peu différente de la sphère pour qu'elle puisse être déterminée par l'observation directe.

CHAPITRE VI.

DE LA FIGURE DE L'ANNEAU DE SATURNE.

44. L'anneau de Saturne est une couronne circulaire d'une très-mince épaisseur, dont le centre est le même que celui de la planète, et dont la largeur paraît être environ le tiers du diamètre de Saturne, la distance du bord intérieur à la surface de cette planète étant à peu près égale à cette largeur. La surface de l'anneau est divisée en deux parties presque égales par une bande obscure qui lui est concentrique, et qui prouve que l'anneau est formé de deux anneaux concentriques, et même d'un plus grand nombre, si l'on s'en rapporte aux observations de Short, qui assure avoir aperçu, avec un fort télescope, la surface de l'anneau extérieur divisée par des bandes obscures qui lui sont concentriques. Nous supposerons, comme dans les recherches précédentes, qu'une couche infiniment mince de fluide, répandue sur la surface de ces anneaux, y serait en équilibre en vertu des forces dont elle serait animée; il est, en effet, contre toute vraisemblance de supposer que ces anneaux ne se soutiennent autour de Saturne que par l'adhérence de leurs molécules; car alors leurs parties les plus voisines de la planète, sollicitées par l'action toujours renaissante de la pesanteur, se seraient, à la longue, détachées des anneaux, qui, par une dégradation insensible, auraient fini par se détruire, ainsi que tous les ouvrages de la nature qui n'ont point opposé des forces suffisantes à l'action des causes étrangères. C'est par les conditions de l'équilibre de ce fluide que nous allons déterminer la figure des anneaux.

On peut concevoir chaque anneau comme produit par la révolution

d'une figure fermée, telle que l'ellipse, mue perpendiculairement à son plan, autour du centre de Saturne placé sur le prolongement de l'axe de cette figure. Nous supposerons cet axe très-petit par rapport à la distance de son centre à celui de la planète. On a vu, dans le n° 11 du second Livre, que, x, y, z étant les trois coordonnées orthogonales d'un point attiré par un sphéroïde, et V étant la somme des molécules du sphéroïde divisées par leurs distances à ce point, on a

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Si, le sphéroïde étant de révolution, l'axe des z est l'axe même de révolution, et si l'on fait $r^2 = x^2 + y^2$, V devient fonction de z et de r, puisque cette fonction doit rester la même quand r et z sont les mêmes; on a donc alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2};$$

l'équation précédente deviendra ainsi

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

c'est l'équation relative au sphéroïde de révolution.

Si l'on fait $r = a + u$, a étant la distance du centre de Saturne au centre de la figure génératrice de l'anneau, on aura

$$(1) \qquad 0 = \frac{1}{a+u}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

et, si l'on suppose les coordonnées u et z très-petites par rapport au rayon a, on aura, à fort peu près,

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

c'est l'équation relative aux cylindres d'une longueur infinie de chaque

côté de l'origine des u et des z, et l'on voit que ce cas est à fort peu près celui de l'anneau, quand le point attiré est voisin de sa surface.

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$V = \varphi(u + z\sqrt{-1}) + \psi(u - z\sqrt{-1}),$$

$\varphi(u)$ et $\psi(u)$ étant des fonctions arbitraires de u. On peut mettre cette expression de u sous la forme suivante

$$V = f(u + z\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\,F(u + z\sqrt{-1}) + f(u - z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,F(u - z\sqrt{-1}),$$

$f(u)$ et $F(u)$ étant des fonctions réelles de u. Si la figure génératrice du cylindre est formée de deux parties égales et semblables de chaque côté de l'axe des u, alors l'expression de V reste la même, en y changeant le signe de z; ainsi l'on a, dans ce cas,

$$V = f(u + z\sqrt{-1}) + f(u - z\sqrt{-1}).$$

Pour déterminer la fonction $f(u)$, il suffit de connaître la valeur de V, lorsque $z = 0$, ou lorsque le point attiré est sur le prolongement de l'axe des u, et l'on verra bientôt que la détermination de cette fonction se réduit aux quadratures des courbes.

La valeur de V relative aux cylindres ne doit être considérée que comme une approximation par rapport aux anneaux; mais, en la substituant dans l'équation (1), il est facile d'en conclure des valeurs de V successivement plus approchées. Si l'on fait dans cette équation

$$u + z\sqrt{-1} = s, \quad u - z\sqrt{-1} = s',$$

elle deviendra

$$0 = 2\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{2a - s - s'}\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s'}\right).$$

Soit

$$V = V' + \frac{1}{a}V'' + \frac{1}{a^2}V''' + \ldots;$$

on aura, en comparant les puissances semblables de $\frac{1}{a}$, les équations

suivantes

$$0 = 2\frac{\partial^2 V'}{\partial s \partial s'},$$

$$0 = 2\frac{\partial^2 V''}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial s} + \frac{\partial V'}{\partial s'}\right),$$

$$0 = 2\frac{\partial^2 V'''}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial s} + \frac{\partial V''}{\partial s'}\right) - \frac{s+s'}{4}\left(\frac{\partial V'}{\partial s} + \frac{\partial V'}{\partial s'}\right),$$

. . . .

Ces équations donneront, en les intégrant, les valeurs de V', V'', ...; pour en déterminer les fonctions arbitraires, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la figure génératrice de l'anneau est égale et semblable de chaque côté de l'axe des u, ce qui réduit à une seule les fonctions arbitraires de chacune des valeurs de V', V'', ... Pour les obtenir, il suffira de connaître ces valeurs, lorsque le point attiré est placé sur le prolongement de l'axe des u. Considérons une ligne circulaire parallèle au plan qui, passant par l'axe des u, est perpendiculaire à la figure génératrice; supposons que le centre de cette circonférence soit sur la droite qui passe par le centre de Saturne, perpendiculairement à ce plan. Nommons y la hauteur de ce centre au-dessus de ce plan, $a + x$ le rayon de cette circonférence, et ϖ l'angle que ce rayon forme avec le plan de la figure génératrice qui passe par le point attiré; soit $a + u$ la distance de ce point au centre de Saturne. Cela posé, la somme des molécules de la circonférence, divisées par leurs distances au point attiré, sera

$$\int \frac{(a+x)\, d\varpi}{\sqrt{(a+u)^2 - 2(a+u)(a+x)\cos\varpi + (a+x)^2 + y^2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à la circonférence. Il faut ensuite multiplier cette intégrale par dy, et l'intégrer depuis $y = -\varphi(x)$ jusqu'à $y = \varphi(x)$, $y^2 = [\varphi(x)]^2$ étant l'équation de la figure génératrice de l'anneau; il faut enfin, pour avoir la valeur de V, multiplier cette nouvelle intégrale par dx, et l'intégrer depuis $x = -k$ jusqu'à $x = k'$, $-k$ et k' étant les limites des valeurs de x. Ces diverses intégrations sont inexécutables rigoureusement; on peut obtenir leurs

développements en séries suivant les puissances de $\frac{1}{a}$, ce qui suffit dans la question présente; mais, comme V devient infini dans la supposition de a infini, il faut, au lieu de chercher V, déterminer $\frac{\partial V}{\partial u}$, dont la valeur n'est jamais infinie. Il est visible que l'expression de $\frac{\partial V}{\partial u}$ donnera celle de $\frac{\partial V}{\partial z}$, et par conséquent on aura les attractions de l'anneau parallèles aux axes des u et des z.

Les dimensions de la figure génératrice des anneaux de Saturne sont assez petites relativement à leurs diamètres pour que l'on puisse négliger les termes divisés par a; or, si l'on substitue dans l'intégrale précédente, au lieu de $\cos\varpi$, sa valeur en série $1 - \frac{1}{2}\varpi^2 + \ldots$, et si l'on suppose $a\varpi = t$, elle devient, en négligeant les termes divisés par a,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(u-x)^2 + y^2 + t^2}}.$$

Sa différentielle, prise par rapport à u et divisée par du, est

$$-\int \frac{(u-x)\,dt}{[(u-x)^2 + y^2 + t^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale relative à ϖ devant être prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, elle est évidemment la même que si on la prenait depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, ce qui, dans le cas de a infini, revient à prendre l'intégrale relative à t depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; et alors elle devient

$$\frac{2(u-x)}{(u-x)^2 + y^2},$$

et par conséquent on a, lorsque le point attiré est sur l'axe des u,

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 2\int\int \frac{(u-x)\,dy\,dx}{(u-x)^2 + y^2} = 4\int dx \operatorname{arc\,tang} \frac{\varphi(x)}{u-x}.$$

Si l'on suppose que la figure génératrice de l'anneau est une ellipse,

en représentant son équation par la suivante

$$\lambda^2 y^2 = k^2 - x^2,$$

on trouvera

$$-\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{4\pi\lambda}{\lambda^2 - 1}\left(u - \sqrt{u^2 - k^2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}\right).$$

La valeur de $-\frac{\partial V}{\partial u}$ relative à un point quelconque attiré est, par ce qui précède,

$$-f'(u + z\sqrt{-1}) - f'(u - z\sqrt{-1}),$$

$f'(u)$ étant la différentielle de $f(u)$ divisée par du; en égalant donc ces deux valeurs de $-\frac{\partial V}{\partial u}$ dans le cas de $z = 0$, on aura celle de $f'(u)$.

La valeur de $-\frac{\partial V}{\partial z}$ est

$$-\sqrt{-1}\,f'(u + z\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\,f'(u - z\sqrt{-1});$$

$-\frac{\partial V}{\partial u}$ et $-\frac{\partial V}{\partial z}$ expriment les attractions de l'anneau parallèles aux axes des u et des z et dirigées vers le centre de la figure génératrice, d'où il est facile de conclure que, dans le cas où cette figure est une ellipse, ces attractions sont

$$\frac{2\pi\lambda}{\lambda^2 - 1}\left[u + z\sqrt{-1} - \sqrt{(u + z\sqrt{-1})^2 - k^2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}\right.$$
$$\left. + u - z\sqrt{-1} - \sqrt{(u - z\sqrt{-1})^2 - k^2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}\right],$$

et

$$\frac{2\pi\lambda\sqrt{-1}}{\lambda^2 - 1}\left[u + z\sqrt{-1} - \sqrt{(u + z\sqrt{-1})^2 - k^2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}\right.$$
$$\left. - (u - z\sqrt{-1}) + \sqrt{(u - z\sqrt{-1})^2 - k^2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}}\right].$$

Si le point attiré est à la surface du sphéroïde, où l'on a $u^2 + \lambda^2 z^2 = k^2$, elles deviennent

$$\frac{4\pi u}{\lambda + 1}, \quad \text{et} \quad \frac{4\pi\lambda z}{\lambda + 1}.$$

45. Supposons maintenant que l'anneau soit une masse fluide homogène, et que sa figure génératrice soit une ellipse; nommons a la distance du centre de cette ellipse à celui de Saturne, a étant supposé très-grand par rapport aux dimensions de l'ellipse. Concevons que l'anneau tourne dans son plan autour de Saturne, et nommons g la force centrifuge due à ce mouvement de rotation à la distance 1 de l'axe de rotation. Cette force, relativement à la molécule de l'anneau dont les coordonnées sont u et z, sera $(a+u)g$, et en la multipliant par l'élément de sa direction, le produit sera $(a+u)g\,du$. L'attraction de Saturne sur la même molécule est $\frac{S}{(a+u)^2+z^2}$, S étant la masse de Saturne; en la multipliant par l'élément de sa direction, qui est égal à $-d\sqrt{(a+u)^2+z^2}$, on aura, en négligeant les carrés de u et de z,

$$-\frac{S\,du}{a^2}+\frac{2Su\,du}{a^3}-\frac{Sz\,dz}{a^3}.$$

Les attractions que la même molécule éprouve de la part de l'anneau, multipliées par les éléments $-du$ et $-dz$ de leurs directions, donnent les produits

$$-\frac{4\pi u\,du}{\lambda+1}, \quad \text{et} \quad -\frac{4\pi\lambda z\,dz}{\lambda+1}.$$

Présentement, la condition générale de l'équilibre est que la somme de tous ces produits soit nulle; on a donc

$$o=\left(\frac{S}{a^2}-ag\right)du+\left(\frac{4\pi}{\lambda+1}-\frac{2S}{a^3}-g\right)u\,du+\left(\frac{4\pi\lambda}{\lambda+1}+\frac{S}{a^3}\right)z\,dz;$$

c'est l'équation différentielle de la figure génératrice de l'anneau; mais nous avons supposé que cette figure est une ellipse dont l'équation est $u^2+\lambda^2z^2=k^2$, et dont l'équation différentielle est par conséquent $o=u\,du+\lambda^2z\,dz$; en comparant cette équation différentielle à la précédente, on aura les deux suivantes

$$g=\frac{S}{a^3}, \quad \frac{\frac{4\pi\lambda}{\lambda+1}+\frac{S}{a^3}}{\frac{4\pi}{\lambda+1}-\frac{3S}{a^3}}=\lambda^2.$$

La première de ces équations détermine le mouvement de rotation de l'anneau; la seconde détermine l'ellipticité de sa figure génératrice. Si l'on fait $e = \frac{S}{4\pi a^3}$, la seconde de ces équations donne

$$e = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(3\lambda^2 + 1)}.$$

e étant positif, on voit que λ doit être plus grand que l'unité. L'axe de l'ellipse dirigé vers Saturne est égal à $2k$, et il mesure la largeur de l'anneau; l'axe qui lui est perpendiculaire est égal à $\frac{2k}{\lambda}$, et il mesure l'épaisseur de l'anneau; cette épaisseur est donc moindre que la largeur.

On voit ensuite que e est nul lorsque $\lambda = 1$ et lorsque $\lambda = \infty$, d'où il suit qu'à une même valeur de e répondent deux valeurs différentes de λ; mais on peut choisir la plus grande qui donne un anneau plus aplati. La valeur de e est susceptible d'un maximum, qui répond à fort peu près à $\lambda = 2,594$. Dans ce cas, $e = 0,0543026$; cette valeur est donc la plus grande dont e soit susceptible. En désignant par R le rayon du globe de Saturne, et par ρ sa moyenne densité, celle de l'anneau étant prise pour unité, on aura

$$S = \tfrac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

et par conséquent

$$e = \frac{\rho R^3}{3a^3}.$$

Ainsi la plus grande valeur que l'on puisse supposer à ρ est

$$0,1629078 \cdot \frac{a^3}{R^3}.$$

La difficulté d'avoir le vrai rapport de a à R, vu la petitesse de ces grandeurs et l'effet de l'irradiation, ne permet pas d'évaluer exactement la limite de ρ; en supposant $\frac{a}{R} = 2$ relativement à l'anneau le plus intérieur, ce qui s'éloigne peu de la vérité, on aura $\frac{13}{10}$ environ pour cette limite.

L'irradiation doit considérablement augmenter la largeur apparente des anneaux, dont la largeur réelle est conséquemment beaucoup moindre; peut-être même cette irradiation confond en un seul, dans les meilleurs télescopes, plusieurs anneaux distincts, de même que les télescopes moins forts nous présentent l'ensemble des anneaux de Saturne comme ne formant qu'un seul anneau; on ne peut donc établir rien de certain sur la figure des anneaux dont cette planète est environnée. Nous nous contenterons d'observer que la petitesse de leur largeur et de leur épaisseur, relativement à leurs distances à son centre, rend plus exacte l'application de la théorie précédente à leur figure, et l'explication que nous venons de donner de la manière dont ces anneaux peuvent se soutenir autour de Saturne par les lois seules de l'équilibre des fluides.

Il est facile de déterminer la durée de la rotation de chaque anneau, d'après la distance a du centre de la section génératrice au centre de Saturne; car la force centrifuge g, due à son mouvement de rotation, étant égale à $\frac{S}{a^2}$, il est clair que ce mouvement est le même que celui d'un satellite placé à la distance a du centre de Saturne; d'où il suit que la période de ce mouvement doit être d'environ $0^{\text{jour}},44$, relativement à l'anneau intérieur, ce qui est conforme à l'observation.

46. La théorie précédente subsisterait encore dans le cas où l'ellipse génératrice varierait de grandeur et de position dans toute l'étendue de la circonférence génératrice de l'anneau, qui peut ainsi être supposé d'une largeur inégale dans ses diverses parties; on peut même lui supposer une double courbure, pourvu que toutes ces variations de grandeur et de position ne soient sensibles qu'à des distances d'un point quelconque donné sur sa surface, beaucoup plus grandes que le diamètre de la section génératrice, passant par ce point. Ces inégalités sont indiquées par les apparitions et les disparitions de l'anneau de Saturne, dans lesquelles les deux bras de l'anneau ont présenté des phénomènes différents. J'ajoute que ces inégalités sont nécessaires pour maintenir l'anneau en équilibre autour de Saturne; car, s'il était

parfaitement semblable dans toutes ses parties, son équilibre serait troublé par la force la plus légère, telle que l'attraction d'une comète ou d'un satellite, et l'anneau finirait par se précipiter sur la surface de Saturne. Pour le faire voir, imaginons que l'anneau soit une ligne circulaire dont r soit le rayon, et dont le centre soit à la distance z du centre de Saturne, supposé dans le plan de l'anneau. Il est clair que la résultante de l'attraction de Saturne sur cette circonférence sera dirigée suivant la droite z qui joint les deux centres. Si l'on nomme ϖ l'angle que le rayon r forme avec le prolongement de z,

$$-\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\mathrm{S}\,d\varpi}{\sqrt{r^2+2rz.\cos\varpi+z^2}}$$

sera l'attraction de Saturne sur l'anneau, décomposée parallèlement à z, l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à la circonférence, et la différentielle étant prise par rapport à z. Nommons A cette attraction; le centre de l'anneau sera donc mu comme si, toute sa masse étant réunie à ce point, il était sollicité par la force A dirigée vers le centre de Saturne.

En désignant par c le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on a

$$\frac{1}{(r^2+2rz\cos\varpi+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{r\left(1+\frac{z}{r}c^{\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{z}{r}c^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}c^{\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}=1+\alpha\frac{z}{r}c^{\varpi\sqrt{-1}}+\alpha'\frac{z^2}{r^2}c^{2\varpi\sqrt{-1}}+\ldots;$$

on aura

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}c^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}=1+\alpha\frac{z}{r}c^{-\varpi\sqrt{-1}}+\alpha'\frac{z^2}{r^2}c^{-2\varpi\sqrt{-1}}+\ldots.$$

Si l'on multiplie ces deux suites l'une par l'autre, et qu'après avoir

multiplié leur produit par $d\varpi$, on l'intègre depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à la circonférence entière représentée par 2π, on aura

$$\int \frac{d\varpi}{\sqrt{r^2 + 2rz\cos\varpi + z^2}} = \frac{2\pi}{r}\left(1 + \alpha^2 \frac{z^2}{r^2} + \alpha'^2 \frac{z^4}{r^4} + \ldots\right),$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{A} = -\frac{4\pi S z}{r^3}\left(\alpha^2 + 2\alpha'^2 \frac{z^2}{r^2} + \ldots\right).$$

Cette quantité est négative, quel que soit z; ainsi le centre de Saturne repousse celui de l'anneau, et, quel que soit le mouvement relatif de ce second centre autour du premier, la courbe qu'il décrit par ce mouvement est convexe vers Saturne; le centre de l'anneau doit donc finir par s'éloigner de plus en plus de celui de la planète, jusqu'à ce que sa circonférence vienne en toucher la surface.

Un anneau parfaitement semblable dans toutes ses parties serait composé d'une infinité de circonférences pareilles à celle que nous venons de considérer; le centre de l'anneau serait donc repoussé par celui de Saturne, pour peu que ces deux centres cessassent de coïncider, et alors l'anneau finirait par se joindre à Saturne.

Les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont par conséquent des solides irréguliers d'une largeur inégale dans les différents points de leurs circonférences, en sorte que leurs centres de gravité ne coïncident point avec leurs centres de figure. Ces centres de gravité peuvent être considérés comme autant de satellites qui se meuvent autour du centre de Saturne, à des distances dépendantes de l'inégalité des parties de chaque anneau, avec des vitesses de rotation égales à celles de leurs anneaux respectifs.

Dans la recherche de leurs figures, nous avons fait abstraction de leur action mutuelle, ce qui suppose l'intervalle qui les sépare assez grand pour que cette action n'ait pas une influence sensible sur leur figure. Il serait cependant facile d'y avoir égard, et l'on peut s'assurer aisément que la figure génératrice de chaque anneau serait encore elliptique si les anneaux étaient fort aplatis. Mais, la stabilité de leur

équilibre exigeant que leur figure soit irrégulière, et ces anneaux, doués de divers mouvements de rotation, changeant sans cesse leur position respective, leur action réciproque doit être extrêmement variable, et elle ne doit point entrer en considération dans la recherche de leur figure permanente.

CHAPITRE VII.

DE LA FIGURE DES ATMOSPHÈRES DES CORPS CÉLESTES.

47. Un fluide rare, transparent, élastique et compressible, soutenu par un corps qu'il environne et sur lequel il pèse, est ce que je nomme son *atmosphère*. Nous concevons autour de chaque corps céleste une pareille atmosphère, dont l'existence, vraisemblable pour tous, est, relativement au Soleil, à la Terre et à plusieurs planètes, indiquée par les observations. A mesure que le fluide atmosphérique s'élève au-dessus du corps, il devient de plus en plus rare, en vertu de son ressort qui le dilate d'autant plus qu'il est moins comprimé; mais, si les parties de sa surface étaient élastiques, il s'étendrait sans cesse, et finirait par se dissiper dans l'espace; il est donc nécessaire que le ressort du fluide atmosphérique diminue dans un plus grand rapport que le poids qui le comprime, et qu'il existe un état de rareté dans lequel ce fluide soit sans ressort. C'est dans cet état qu'il doit être à la surface de l'atmosphère.

Toutes les couches atmosphériques doivent prendre à la longue un même mouvement de rotation, commun au corps qu'elles environnent; car le frottement de ces couches les unes contre les autres et contre la surface du corps doit accélérer les mouvements les plus lents et retarder les plus rapides, jusqu'à ce qu'il y ait entre eux une parfaite égalité.

A la surface de l'atmosphère, le fluide n'est retenu que par sa pesanteur, et la figure de cette surface est telle que la résultante de la force centrifuge et de la force attractive du corps lui est perpendiculaire;

car le peu de densité de l'atmosphère permet de négliger l'attraction de ses molécules. Déterminons cette figure, et, pour cela, nommons V la somme des molécules du sphéroïde que l'atmosphère recouvre, divisées par leurs distances respectives à une molécule quelconque dM de cette atmosphère. Soit r la distance de cette molécule au centre de gravité du sphéroïde, θ l'angle que r forme avec l'axe de rotation du sphéroïde, et ϖ l'angle que le plan mené par cet axe et par le rayon r fait avec un méridien fixe sur la surface du sphéroïde. Soit encore n la vitesse angulaire de rotation du sphéroïde; la force centrifuge de la molécule dM sera $n^2 r \sin\theta$. L'élément de sa direction sera $d(r\sin\theta)$; ainsi l'intégrale de cette force multipliée par l'élément de sa direction sera $\frac{1}{2}n^2 r^2 \sin^2\theta$; en nommant donc ρ la densité de la molécule dM, et Π la pression qu'elle éprouve, on aura, par le n° 22,

$$\int \frac{d\Pi}{\rho} = \text{const.} + V + \tfrac{1}{2}n^2 r^2 \sin^2\theta, \tag{1}$$

Π étant une fonction de ρ.

Si le sphéroïde est peu différent d'une sphère, l'expression de V est, par les n°s 11 et 31, de cette forme

$$\frac{m}{r} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \frac{U^{(3)}}{r^4} + \ldots,$$

m étant la masse du sphéroïde, et $U^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)U^{(i)},$$

μ étant égal à $\cos\theta$. Si l'on substitue pour V cette valeur dans l'équation (1), on aura l'équation de toutes les couches de même densité de l'atmosphère.

A la surface extérieure, $\Pi = 0$, et, si l'on néglige l'excentricité du sphéroïde, et que l'on désigne par α le rapport de la force centrifuge

à la pesanteur à l'équateur et sur la surface du sphéroïde, dont nous prendrons le rayon pour unité, l'équation (1) devient

$$c = \frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2\theta.$$

En nommant R le rayon du pôle de l'atmosphère, on a $c = \frac{2}{R}$; partant,

$$\frac{2}{R} = \frac{2}{r} + \alpha r^2 \sin^2\theta.$$

Pour avoir le rapport des deux axes de l'atmosphère, nommons R′ le rayon de son équateur; l'équation précédente donnera

$$\alpha R'^3 = 2\,\frac{R' - R}{R}.$$

La plus grande valeur dont R′ soit susceptible est celle qui s'étend jusqu'au point où la force centrifuge devient égale à la pesanteur; on a dans ce cas $\frac{1}{R'^2} = \alpha R'$, ou $\alpha R'^3 = 1$, et par conséquent $\frac{R'}{R} = \frac{3}{2}$. Ce rapport de R′ à R est le plus grand qu'il est possible; car en faisant $\alpha R'^3 = 1 - z$, z étant nécessairement positif ou zéro, on aura $\frac{R'}{R} = \frac{3 - z}{2}$.

Le rayon le plus grand de l'atmosphère est celui de l'équateur; en effet, l'équation de sa surface donne, en la différentiant,

$$dr = \frac{\alpha r^4\, d\theta \sin\theta \cos\theta}{1 - \alpha r^3 \sin^2\theta}.$$

Le dénominateur de cette fraction est constamment positif; car la force centrifuge, décomposée suivant le rayon r, est égale à $\alpha m r \sin^2\theta$, et elle doit être moindre que la pesanteur, qui est égale à $\frac{m}{r^2}$; r croît donc avec θ du pôle à l'équateur.

Donnons à l'équation de la surface de l'atmosphère la forme suivante

$$r^3 - \frac{2r}{\alpha R \sin^2\theta} + \frac{2}{\alpha \sin^2\theta} = 0.$$

Les valeurs de r qui conviennent au problème doivent être positives, et telles que $1 - \alpha r^3 \sin^2\theta$ soit plus grand que zéro; or il ne peut y avoir qu'une racine de cette nature; car, si l'on nomme p, p', p'' les trois valeurs de r données par l'équation précédente, et si l'on suppose p et p' positifs et moindres que $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha \sin^2\theta}}$, l'équation en r manquant de son second terme, ce qui donne $p'' = -p - p'$, p'' serait négatif et moindre que $\frac{2}{\sqrt[3]{\alpha \sin^2\theta}}$; le produit $-pp'p''$ serait donc moindre que $\frac{2}{\alpha \sin^2\theta}$; mais, par la nature des équations, ce produit doit être égal à cette quantité; la supposition précédente est donc impossible, et l'équation en r n'a qu'une racine qui satisfait au problème, c'est-à-dire que l'atmosphère n'a qu'une figure possible d'équilibre.

Si l'on applique ces résultats à l'atmosphère solaire, on voit : 1° qu'elle ne peut s'étendre que jusqu'à l'orbite d'une planète qui circulerait dans un temps égal à celui de la rotation de cet astre, c'est-à-dire en vingt-cinq jours et demi; elle est donc fort loin d'atteindre les orbes de Mercure et de Vénus, et l'on sait que la lumière zodiacale s'étend beaucoup au delà. On voit : 2° que le rapport du petit au grand axe de cette atmosphère ne peut être moindre que $\frac{2}{3}$, et la lumière zodiacale paraît sous la forme d'une lentille fort aplatie, dont le tranchant est dans le plan de l'équateur solaire. Le fluide qui nous réfléchit la lumière zodiacale n'est donc point l'atmosphère du Soleil, et, puisqu'il environne cet astre, il doit circuler autour de lui suivant les mêmes lois que les planètes; c'est peut-être la cause pour laquelle il n'oppose qu'une résistance insensible à leurs mouvements.

LIVRE IV.

DES OSCILLATIONS DE LA MER ET DE L'ATMOSPHÈRE.

L'action du Soleil et de la Lune sur la mer et sur l'atmosphère excite dans ces deux masses fluides des oscillations dont il est intéressant de déterminer la loi. Les oscillations de la mer sont connues sous le nom de *flux* et *reflux;* elles sont très-sensibles dans nos ports; celles de l'atmosphère sont peu sensibles en elles-mêmes, et peuvent être d'autant plus difficilement observées, qu'elles se confondent avec les vents irréguliers dont l'atmosphère est sans cesse agitée. Nous allons considérer dans ce Livre ces divers mouvements.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DU FLUX ET DU REFLUX DE LA MER.

1. Reprenons les équations générales du mouvement de la mer, que nous avons données dans le dernier Chapitre du premier Livre. Si l'on prend pour unité le demi-petit axe de la Terre, et que l'on représente par γ la profondeur de la mer, supposée très-petite par rapport à ce demi-axe, γ sera une fonction de θ et de ϖ, θ étant le complément de la latitude d'une molécule dm de la surface de la mer, dans l'état d'équilibre qu'elle prendrait sans l'action du Soleil et de la Lune, et ϖ étant

la longitude de la molécule dans cet état, cette longitude étant comptée d'un méridien fixe sur la Terre. Soit αy l'élévation de la molécule *dm* au-dessus de cette surface d'équilibre, dans l'état de mouvement, et supposons que par cet état θ se change dans $\theta + \alpha u$, et ϖ dans $\varpi + \alpha v$; enfin, soit nt le moyen mouvement de rotation de la Terre, et g la pesanteur; on aura, par le n° 36 du premier Livre, les deux équations suivantes

$$(1) \qquad y = -\frac{\partial . \gamma u}{\partial \theta} - \frac{\partial . \gamma v}{\partial \varpi} - \frac{\gamma u \cos\theta}{\sin\theta},$$

$$(2) \quad d\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\frac{\partial v}{\partial t}\sin\theta\cos\theta\right) + d\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\frac{\partial u}{\partial t}\sin\theta\cos\theta\right) = -g\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}V',$$

les différences $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}V'$ étant uniquement relatives aux variables θ et ϖ. La fonction $\alpha\,\mathrm{d}V'$ exprime, comme on l'a vu dans le n° 35 du premier Livre, la somme des produits de toutes les forces qui troublent l'état d'équilibre de la molécule *dm* par les éléments de leurs directions, en ne conservant que les différentielles $d\theta$ et $d\varpi$. Ces forces sont d'abord l'action du Soleil et de la Lune; on aura la partie de $\alpha\,\mathrm{d}V'$ relative à cette action, en divisant respectivement la somme des masses du Soleil et de la Lune par leurs distances à la molécule *dm*, et en différentiant ces quotients par rapport aux variables θ et ϖ; or, si l'on nomme r la distance d'un astre L au centre de la Terre, v sa déclinaison, et ψ son ascension droite, sa distance à la molécule *dm* sera, par le n° 23 du troisième Livre, à très-peu près,

$$\sqrt{r^2 - 2r[\cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos(nt + \varpi - \psi)] + 1},$$

l'angle $nt + \varpi$ étant compté, comme l'angle ψ, de l'équinoxe du printemps; ainsi, pour avoir la partie de $\alpha\,\mathrm{d}V'$ relative à l'action de l'astre L, il faut différentier par rapport à θ et à ϖ la fonction

$$\frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r[\cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos(nt + \varpi - \psi)] + 1}}.$$

Mais, comme on suppose le centre de gravité de la Terre immobile, il

faut transporter en sens contraire, à la molécule dm, la force dont ce centre est animé par l'action de L, et l'on a vu, dans le n° 23 du troisième Livre, que cela revient à retrancher de la fonction précédente celle-ci

$$\frac{L}{r} + \frac{L}{r^2}[\cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi)];$$

on aura donc la valeur de $\alpha dV'$ dépendante de l'action de L, en différentiant par rapport à θ et à ϖ la différence de ces deux fonctions, différence qui, par le numéro cité du troisième Livre, peut se développer dans une suite descendante par rapport aux puissances de r, telle qu'en la désignant par

$$\frac{\alpha Z^{(0)}}{r} + \frac{\alpha Z^{(2)}}{r^3} + \frac{\alpha Z^{(3)}}{r^4} + \frac{\alpha Z^{(4)}}{r^5} + \ldots,$$

$Z^{(i)}$ est une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, du degré i, assujettie à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial Z^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 Z^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Z^{(i)},$$

μ étant égal à $\cos\theta$.

$\alpha dV'$ se compose encore de l'attraction sur la molécule dm de la couche aqueuse dont, le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1 + \alpha y$, et il est facile de voir que, pour la déterminer, il faut diviser chacune des molécules de la couche par sa distance à la molécule dm, et différentier la somme de ces quotients relativement à θ et ϖ. Il faut, de plus, transporter en sens contraire, à la molécule, l'action de cette couche sur le centre de gravité de la Terre; mais il est visible que, ce centre ne changeant point par l'attraction et par la pression des diverses parties de la Terre, cette action doit être ici négligée.

2. Considérons d'abord le cas dans lequel la Terre n'aurait point de mouvement de rotation, et où l'on aurait par conséquent $n = 0$; supposons, de plus, la Terre sphérique, et la profondeur γ de la mer égale à une constante l, et déterminons les oscillations que doit y exciter

l'action du Soleil et de la Lune. L'équation (1) du numéro précédent devient, en y faisant $\cos\theta = \mu$ et $\gamma = l$,

$$\frac{y}{l} = \frac{\partial(u\sqrt{1-\mu^2})}{\partial\mu} - \frac{\partial v}{\partial\varpi};$$

l'équation (2) devient

$$d\theta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\varpi(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -g\frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}d\theta - g\frac{\partial y}{\partial\varpi}d\varpi + \frac{\partial V'}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial V'}{\partial\varpi}d\varpi;$$

or on a $\frac{\partial\mu}{\partial\theta} = -\sqrt{1-\mu^2}$; on aura donc, en comparant les coefficients de $d\theta$ et de $d\varpi$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial y}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{g\frac{\partial y}{\partial\varpi}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial V'}{\partial\varpi}}{1-\mu^2};$$

partant,

$$\frac{\partial.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} = g\frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial y}{\partial\mu}}{\partial\mu} - \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial V'}{\partial\mu}}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\partial\varpi} = -g\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial^2 V'}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2}.$$

L'expression précédente de $\frac{y}{l}$ donne

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = l\frac{\partial.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - l\frac{\partial\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{\partial\varpi};$$

on aura donc

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = lg\frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial y}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{lg\frac{\partial^2 y}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} - l\frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial V'}{\partial\mu}}{\partial\mu} - \frac{l\frac{\partial^2 V'}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2}.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \ldots,$$

$Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$,... étant des fonctions rationnelles et entières de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, telles que l'on a généralement

$$o = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Y^{(i)}.$$

La partie de V′ relative à la couche sphérique fluide dont le rayon intérieur est l'unité, et dont le rayon extérieur est $1+\alpha y$, sera, par le n° **14** du troisième Livre, en prenant pour unité de densité la densité de la mer,

$$4\pi(Y^{(0)} + \tfrac{1}{3}Y^{(1)} + \tfrac{1}{5}Y^{(2)} + \tfrac{1}{7}Y^{(3)} + \ldots),$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Nommons ρ la moyenne densité de la Terre entière; nous aurons $g = \frac{4}{3}\pi\rho$, et par conséquent $4\pi = \frac{3g}{\rho}$.

Il résulte du numéro précédent que la partie de $\alpha V'$ relative à l'action du Soleil et de la Lune, et généralement à l'action d'un nombre quelconque d'astres attirants, peut se développer dans une suite de la forme

$$\alpha U^{(0)} + \alpha U^{(2)} + \alpha U^{(3)} + \alpha U^{(4)} + \ldots,$$

$U^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de l'ordre i, en μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$o = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)U^{(i)}.$$

Cela posé, si l'on substitue pour y et V′ ces valeurs dans l'équation (3), la comparaison des fonctions semblables $U^{(i)}$ et $Y^{(i)}$ donnera

$$\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial t^2} + \frac{i(i+1)lg}{(2i+1)\rho}[(2i+1)\rho - 3]Y^{(i)} = i(i+1)lU^{(i)}.$$

Supposons, pour abréger,

$$\frac{i(i+1)lg}{(2i+1)\rho}[(2i+1)\rho - 3] = \lambda_i^2;$$

24.

l'équation différentielle précédente donnera, en l'intégrant,

$$Y^{(i)} = lM^{(i)}\sin\lambda_i t + lN^{(i)}\cos\lambda_i t + \frac{i(i+1)}{\lambda_i} l\sin\lambda_i t.\int U^{(i)}dt\cos\lambda_i t - \frac{i(i+1)}{\lambda_i} l\cos\lambda_i t.\int U^{(i)}dt\sin\lambda_i t,$$

$M^{(i)}$ et $N^{(i)}$ étant des fonctions rationnelles et entières de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, qui satisfont aux équations à différences partielles

$$o = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial M^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 M^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)M^{(i)},$$

$$o = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial N^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 N^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)N^{(i)}.$$

L'équation différentielle en $Y^{(i)}$ donne, en y supposant $i = o$, $\frac{\partial^2 Y^{(0)}}{\partial t^2} = o$, et par conséquent

$$Y^{(0)} = lM^{(0)}t + lN^{(0)};$$

l'équation

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots$$

donnera donc

$$\begin{aligned} y = lM^{(0)}t + lN^{(0)} &+ lM^{(1)}\sin\lambda_1 t + lN^{(1)}\cos\lambda_1 t \\ &+ lM^{(2)}\sin\lambda_2 t + lN^{(2)}\cos\lambda_2 t \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ lM^{(i)}\sin\lambda_i t + lN^{(i)}\cos\lambda_i t \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{6l}{\lambda_2}\sin\lambda_2 t.\int U^{(2)}dt\cos\lambda_2 t \\ &- \frac{6l}{\lambda_2}\cos\lambda_2 t.\int U^{(2)}dt\sin\lambda_2 t \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{i(i+1)l}{\lambda_i}\sin\lambda_i t.\int U^{(i)}dt\cos\lambda_i t \\ &- \frac{i(i+1)l}{\lambda_i}\cos\lambda_i t.\int U^{(i)}dt\sin\lambda_i t \\ &+ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On déterminera les fonctions $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$,... au moyen de la figure initiale du fluide, et les fonctions $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$,... au moyen de sa vitesse initiale; ainsi, l'expression précédente de y embrassant toutes les figures et toutes les vitesses dont le fluide est susceptible, elle a toute la généralité que l'on peut désirer.

Si la quantité $M^{(0)}$ n'était pas nulle, la valeur de y irait en croissant sans cesse, et l'équilibre ne serait pas ferme, quel que fût d'ailleurs le rapport de la densité du fluide à celle de la sphère qu'il recouvre. Mais il est facile de s'assurer que les quantités $M^{(0)}$ et $N^{(0)}$ sont nulles, par cela seul que la masse fluide est constante. Cette condition donne $\int\int y\,d\mu\,d\varpi = 0$, l'intégrale étant prise depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$; or on a généralement, par le n° **12** du troisième Livre,

$$\int\int Y^{(i)} U^{(i')} d\mu\, d\varpi = 0,$$

lorsque i et i' sont des nombres différents; on aura donc

$$\int\int y\, d\mu\, d\varpi = 4\pi Y^{(0)} = 4\pi(M^{(0)} t + N^{(0)});$$

ainsi, en égalant cette quantité à zéro, on aura $M^{(0)} = 0$ et $N^{(0)} = 0$.

Il suit de là que la stabilité de l'équilibre du fluide dépend du signe des quantités λ_1^2, λ_2^2,...; car, si l'une de ces quantités, telle que λ_i^2, est négative, le sinus et le cosinus de l'angle $\lambda_i t$ se changent en exponentielles, et ils se changent en arcs de cercle si $\lambda_i^2 = 0$. Dans ces deux cas, la valeur de y cesse d'être périodique, condition nécessaire pour la stabilité de l'équilibre. λ_i^2 étant égal à $\frac{i(i+1)lg}{(2i+1)\rho}[(2i+1)\rho - 3]$, cette quantité ne peut être positive que dans le cas où l'on a $\rho > \frac{3}{2i+1}$, i étant un nombre entier positif égal ou plus grand que l'unité; il faut donc, pour la stabilité de l'équilibre, que cette condition soit remplie pour toutes les valeurs de i, et cela ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a $\rho > 1$, c'est-à-dire que la densité du noyau doit surpasser celle du fluide. Voilà donc la condition générale de la stabilité de l'équilibre, condition qui, si elle est remplie, rend l'équilibre ferme, quel que soit

l'ébranlement primitif, mais qui, si elle ne l'est pas, fait dépendre la stabilité de l'équilibre de la nature de cet ébranlement.

Si, par exemple, l'ébranlement primitif est tel que le centre de gravité du fluide coïncide avec celui du noyau qu'il recouvre, et n'ait aucun mouvement par rapport à lui dans le premier instant, alors $Y^{(1)}$ et $\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial t}$ seront nuls au premier instant, puisque cette coïncidence ne dépend que de la valeur de $Y^{(1)}$, comme on l'a vu dans le n° 31 du troisième Livre; cette valeur sera donc nulle à tous les instants, et par conséquent le centre de gravité du fluide coïncidera toujours avec celui du noyau. Dans ce cas, la stabilité de l'équilibre dépend du signe de λ_2^2, et, pour que cette quantité soit positive, il suffit que l'on ait $\rho > \frac{3}{5}$.

La valeur de y donne immédiatement celles de u et de v; en effet, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial y}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2}$$

donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Sigma\sqrt{1-\mu^2}\left[g\left(1 - \frac{3}{(2i+1)\rho}\right)\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \mu}\right],$$

le signe des intégrales finies Σ se rapportant à toutes les valeurs entières positives de i, en y comprenant la valeur $i = 0$; mais on a, par ce qui précède,

$$g\left(1 - \frac{3}{(2i+1)\rho}\right)Y^{(i)} - U^{(i)} = -\frac{1}{i(i+1)l}\,\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial t^2};$$

partant,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Sigma\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i(i+1)l}\,\frac{\partial.\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial t^2}}{\partial \mu},$$

d'où l'on tire

$$u = G + Ht - \Sigma\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i(i+1)l}\,\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu},$$

G et H étant des fonctions arbitraires de μ et de ϖ. On trouvera de la même manière

$$v = K + Lt + \Sigma\frac{1}{i(i+1)l(1-\mu^2)}\,\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \varpi},$$

K et L étant des fonctions de μ et de ϖ dépendantes des fonctions G et H; en effet, si dans l'équation

$$y = l\frac{\partial . u\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - l\frac{\partial v}{\partial \varpi}$$

on substitue, au lieu de y, u et v, leurs valeurs précédentes, on aura, en comparant séparément les termes multipliés par t et ceux qui en sont indépendants,

$$0 = \frac{\partial . G\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial K}{\partial \varpi},$$

$$0 = \frac{\partial . H\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial L}{\partial \varpi},$$

en sorte qu'en vertu des valeurs $u = G + Ht$, $v = K + Lt$, la surface du fluide resterait toujours sphérique. Pour concevoir les mouvements du fluide dans cette hypothèse, imaginons qu'il ait un très-petit mouvement de rotation, de l'ordre α, autour de l'axe du sphéroïde; la figure sphérique du fluide n'en sera altérée que d'une quantité très-petite du second ordre, puisque la force centrifuge ne sera que de l'ordre α^2; dans ce cas, on aura $u = 0$ et $v = qt\sqrt{1-\mu^2}$, q étant un coefficient indépendant de μ et de ϖ; mais on peut concevoir le fluide tournant autour de tout autre axe, et de plus, ces mouvements étant supposés fort petits, le fluide mû en vertú d'un nombre quelconque de mouvements semblables conservera toujours, aux quantités près du second ordre, sa figure sphérique. Tous ces mouvements sont compris dans les formules

$$u = G + Ht, \qquad v = K + Lt,$$

G, H, K, L étant des fonctions de μ et de ϖ, qui ont entre elles les relations précédentes. Ces mouvements ne nuisent point à la stabilité de l'équilibre; d'ailleurs, ils doivent être bientôt anéantis par les frottements et les résistances de tout genre que le fluide éprouve.

3. Considérons présentement le cas de la nature, dans lequel le sphéroïde qui recouvre la mer a un mouvement de rotation. L'équation (1)

du n° 1 se transforme dans celle-ci

$$(\mathrm{A}) \qquad y = \frac{\partial.\gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \frac{\partial.\gamma v}{\partial\varpi};$$

l'équation (2) du même numéro donne les deux suivantes

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\dfrac{\partial v}{\partial t}\mu\sqrt{1-\mu^2} = g\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \dfrac{\partial V'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\dfrac{g\dfrac{\partial y}{\partial\varpi}}{1-\mu^2} + \dfrac{\dfrac{\partial V'}{\partial\varpi}}{1-\mu^2}. \end{cases}$$

L'intégration générale de ces équations présente beaucoup de difficultés; nous nous bornerons ici à un cas fort étendu, celui dans lequel γ est une fonction de μ sans ϖ, et nous ferons

$$\begin{aligned} y &= a\cos(it + s\varpi + \varepsilon), \\ u &= b\cos(it + s\varpi + \varepsilon), \\ v &= c\sin(it + s\varpi + \varepsilon), \\ y - \frac{V'}{g} &= a'\cos(it + s\varpi + \varepsilon), \end{aligned}$$

a, b, c, a' étant des fonctions rationnelles de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$, et s étant un nombre entier. En substituant ces valeurs dans les équations (A) et (B), nous aurons

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial.\gamma b\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - s\gamma c, \\ i^2 b + 2nic\mu\sqrt{1-\mu^2} &= -g\frac{\partial a'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2}, \\ i^2 c + \frac{2nib\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} &= -\frac{gsa'}{1-\mu^2}. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations donnent

$$b = \frac{-g\dfrac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2) + \dfrac{2ngs}{i}\mu a'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$c = \frac{\dfrac{2ng}{i}\dfrac{\partial a'}{\partial\mu}\mu(1-\mu^2) - gsa'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)(1-\mu^2)}.$$

En substituant ces valeurs de b et de c dans la première et faisant, pour abréger,

$$z = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2},$$

on aura

$$(4)\quad \begin{cases} a = g\dfrac{\partial . z\left[\dfrac{2ns}{i}\mu a' - \dfrac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right]}{\partial \mu} \\ \qquad + \dfrac{2ngs\mu z}{i(1-\mu^2)}\left[\dfrac{2ns}{i}\mu a' - \dfrac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right] + \dfrac{s^2 g z a'(i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2(1-\mu^2)}. \end{cases}$$

Nous observerons ici que, si $\frac{2ns}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)$ est divisible par $i^2 - 4n^2\mu^2$, le second membre de cette équation n'aura point à son dénominateur la fonction $i^2 - 4n^2\mu^2$.

L'équation (4) renferme ce que nous avons démontré dans le numéro précédent sur le cas de $n = 0$ et de γ égal à une constante l; car alors on a $z = \frac{l}{i^2}$, ce qui change cette équation dans la suivante

$$(5)\qquad i^2 a = lg\left(-\frac{\partial . (1-\mu^2)\dfrac{\partial a'}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{s^2 a'}{1-\mu^2}\right).$$

Supposons que $a\cos(it + s\varpi)$ satisfasse, pour $Y^{(f)}$, à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial . (1-\mu^2)\dfrac{\partial Y^{(f)}}{\partial \mu}}{\partial \mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 Y^{(f)}}{\partial \varpi^2}}{1-\mu^2} + f(f+1)Y^{(f)};$$

la partie de $a'\cos(it + s\varpi)$, due à l'attraction d'une couche aqueuse dont le rayon intérieur est 1 et le rayon extérieur est $1 + \alpha y$, sera, par le numéro précédent, $-\frac{4\pi}{(2f+1)g}a\cos(it + s\varpi)$, ou $-\frac{3a}{(2f+1)\rho}\cos(it + s\varpi)$, à cause de $g = \frac{4}{3}\pi\rho$. En supposant donc nulle la partie de a' correspondante à l'action des astres, on aura

$$a' = \left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right)a;$$

or l'équation aux différences partielles en $Y^{(f)}$ donne

$$o = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial a'}{\partial\mu}}{\partial\mu} - \frac{s^2 a'}{1-\mu^2} + f(f+1)\,a';$$

l'équation (5) donnera donc

$$i^2 = f(f+1)\,lg\left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right).$$

Les nombres s et f étant arbitraires, il est clair que l'on aura la partie de y qui est indépendante de l'action des astres, en réunissant toutes les valeurs de $a\cos(it+s\varpi)$ correspondantes aux diverses valeurs que l'on peut donner à ces nombres.

Pour avoir la partie de y qui dépend de l'action des astres, nommons $e\cos(it+s\varpi)$ un terme de l'expression de V' relatif à cette action, et tel qu'il satisfasse pour $Y^{(f)}$ à l'équation précédente aux différences partielles en $Y^{(f)}$; on aura alors

$$a' = a\left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right) - \frac{e}{g};$$

l'équation (5) donnera donc

$$i^2 a = lgf(f+1)\left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right)a - f(f+1)\,le,$$

et par conséquent,

$$a = \frac{f(f+1)\,le}{lgf(f+1)\left(1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right) - i^2};$$

on aura ainsi la partie de y qui dépend de l'action des astres, et il est aisé de voir que ces résultats coïncident avec ceux du numéro précédent.

4. L'intégration de l'équation (4), dans le cas général où n n'est pas nul et où la mer a une profondeur variable, surpasse les forces de l'analyse; mais, pour déterminer les oscillations de l'océan, il n'est

pas nécessaire de l'intégrer généralement; il suffit d'y satisfaire; car il est clair que la partie des oscillations qui dépend de l'état primitif de la mer a dû bientôt disparaître par les résistances de tout genre que les eaux de la mer éprouvent dans leurs mouvements, en sorte que, sans l'action du Soleil et de la Lune, la mer serait depuis longtemps parvenue à un état permanent d'équilibre; l'action de ces deux astres l'en écarte sans cesse, et il nous suffit de connaître les oscillations qui en dépendent.

r étant la distance au centre de la Terre d'un astre L, la partie de $\alpha V'$ relative à son action sur une molécule fluide, et développée suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, sera, par le n° 1, en négligeant les quatrièmes puissances,

$$\frac{3L}{2r^3}\left\{[\cos\theta\sin v+\sin\theta\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)]^2-\tfrac{1}{3}\right\},$$

ou

$$\begin{aligned}&\frac{L}{4r^3}(\sin^2 v-\tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1+3\cos 2\theta)\\&+\frac{3L}{r^3}\sin\theta\cos\theta\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)\\&+\frac{3L}{4r^3}\sin^2\theta\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi).\end{aligned}$$

Les quantités r, v et ψ variant avec une grande lenteur par rapport au mouvement de rotation de la Terre, les trois termes précédents donnent lieu à trois espèces différentes d'oscillations. Les périodes des oscillations de la première espèce sont fort longues; elles sont indépendantes du mouvement de rotation de la Terre, et ne dépendent que du mouvement de l'astre L dans son orbite. Les périodes des oscillations de la seconde espèce dépendent principalement du mouvement de rotation nt de la Terre; elles sont d'un jour à peu près; enfin, les périodes des oscillations de la troisième espèce dépendent principalement de l'angle $2nt$; elles sont d'environ un demi-jour. L'équation (4) du numéro précédent étant différentielle linéaire, il en résulte que ces

trois espèces d'oscillations se mêlent sans se confondre; nous pouvons donc les considérer séparément.

Des oscillations de la première espèce.

5. Nous supposerons, dans ces recherches, que le sphéroïde recouvert par la mer est un ellipsoïde de révolution, ce qui est l'hypothèse la plus naturelle et la plus simple que l'on puisse adopter. Dans ce cas, l'expression γ de la profondeur de la mer est de la forme $l(1-q\mu^2)$, et l'on a

$$z = \frac{l(1-q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

Reprenons l'équation (4) du n° 3. Les oscillations de la première espèce ne dépendant point de l'angle ϖ, on doit faire $s=0$ dans cette équation. Supposons que l'on ait

$$a = P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} + P^{(6)} + \ldots + P^{(2f)},$$

$P^{(2)}$, $P^{(4)}$, ... étant des fonctions de μ^2 qui satisfont, quel que soit f, à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial P^{(2f)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + 2f(2f+1)P^{(2f)}.$$

La partie de a', relative à y et à l'action de la couche aqueuse dont le rayon intérieur est l'unité et dont le rayon extérieur est $1+\alpha y$, sera, par ce qui précède,

$$\left(1-\frac{3}{\rho}\right)P^{(0)} + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)} + \left(1-\frac{3}{9\rho}\right)P^{(4)} + \ldots + \left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)P^{2f}.$$

La partie de a' relative à l'action des astres ne produit que des quantités de la forme $P^{(2)}$; car la fonction $1+3\cos 2\theta$, qui la multiplie par le numéro précédent, est égale à $6(\mu^2 - \frac{1}{3})$, et il est facile de voir que cette dernière fonction est de la forme $P^{(2)}$. Cela posé, si l'on substitue au lieu de a et de a' leurs valeurs dans l'équation (4) du n° 3, et si

l'on détermine les arbitraires de $P^{(0)}$, $P^{(2)}, \ldots$, de manière que la fonction $\frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)$ soit divisible par $i^2 - 4n^2\mu^2$, ce qui donne une équation de condition entre ces arbitraires; alors la puissance de μ^2 la plus élevée dans chaque membre de cette équation sera μ^{2f}, et, en comparant les coefficients des diverses puissances de μ^2, on aura $f+1$ équations de condition, qui, réunies à la précédente, formeront $f+2$ équations de condition. Mais les arbitraires de la fonction $P^{(0)}+P^{(2)}+P^{(4)}+\ldots$ sont au nombre $f+1$; en y joignant l'indéterminée q, on aura $f+2$ indéterminées, qui pourront satisfaire à ces équations de condition; on pourra donc ainsi satisfaire à l'équation (4) pour une loi déterminée de la profondeur de la mer. On aura cette loi en observant que, si l'on désigne par $Q\mu^{2f}$ le terme de a le plus élevé en μ, le coefficient de μ^{2f-1} dans la fonction $-\frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)$, divisée par $i^2 - 4n^2\mu^2$, sera

$$-f\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\frac{Q}{2n^2},$$

d'où il suit que le coefficient de μ^{2f} dans le second membre de l'équation (4) sera

$$f(2f+1)\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\frac{lgqQ}{2n^2}.$$

En l'égalant au coefficient Q de μ^{2f} dans le premier membre, on aura

$$q=\frac{2n^2}{f(2f+1)\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)lg};$$

en supposant donc la profondeur de la mer égale à l moins le produit de $l\mu^2$ par cette valeur de q, on aura, par l'analyse précédente, les oscillations de la première espèce.

$\frac{n^2}{g}$ est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, rapport égal à $\frac{1}{289}$. En prenant pour f un assez grand nombre, tel que 12 ou 14, le coefficient de μ^2 sera assez petit pour pouvoir être négligé, et alors la profondeur de la mer sera à très-peu près constante; on aura

donc ainsi, d'une manière fort approchée, les oscillations de la mer, dans le cas où sa profondeur est partout la même.

6. La valeur de c du n° 3 est très-grande dans les oscillations de la première espèce, à cause du diviseur i qui affecte plusieurs de ses termes. Si l'on développe la partie

$$\frac{L}{4r^3}(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\theta)$$

de l'action de la Lune, qui produit les oscillations de la première espèce, en sinus et cosinus d'angles croissants proportionnellement au temps; que l'on désigne par $\alpha k(1 + 3\cos 2\theta)\cos(it + A)$ un terme quelconque de ce développement; k sera multiplié par la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, dans le terme où it sera le moyen mouvement des nœuds de l'orbite lunaire; mais, à raison de la petitesse de i, ce terme sera très-considérable et le plus grand de tous ceux qui entrent dans l'expression de c.

Nous devons cependant faire ici une observation importante. Les résistances que les eaux de la mer éprouvent doivent considérablement diminuer les oscillations de cette espèce et leur laisser très-peu d'étendue. Pour le faire voir, supposons la résistance proportionnelle à la vitesse, et nommons 6 le coefficient de cette résistance. Les deux équations dans lesquelles se partage l'équation (2) du n° 1 seront alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\frac{\partial v}{\partial t}\mu\sqrt{1-\mu^2} + 6\frac{\partial u}{\partial t} = g\frac{\partial y}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{2n\mu\frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{1-\mu^2}} + 6\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g\frac{\partial y}{\partial \varpi}}{1-\mu^2} + \frac{\frac{\partial V'}{\partial \varpi}}{1-\mu^2};$$

car il est clair que la résistance doit ajouter aux deux premiers membres de ces équations les termes $6\frac{\partial u}{\partial t}$ et $6\frac{\partial v}{\partial t}$: l'équation (1) du n° 1 subsistera toujours.

Nous ne considérerons ici que les termes dépendants de l'angle it

dans lesquels le coefficient i est très-petit et beaucoup moindre que 6. Dans ce cas, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ peuvent être négligés par rapport à $6\frac{\partial u}{\partial t}$ et $6\frac{\partial v}{\partial t}$, et comme ces termes sont indépendants de l'angle ϖ, la dernière des équations précédentes donnera

$$\frac{2n\mu\frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{1-\mu^2}} + 6\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

et l'avant-dernière deviendra

$$(f) \qquad \frac{6^2+4n^2\mu^2}{6}\frac{\partial u}{\partial t} = g\frac{\partial y}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial V'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2};$$

cette équation doit être combinée avec celle-ci

$$y = \frac{\partial . \gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu}.$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre i, l'équation (f) donne

$$0 = g\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial V'}{\partial \mu},$$

ou

$$gy - V' = 0;$$

partant,

$$u = \int \frac{V'd\mu}{g\gamma\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Cette valeur de u, substituée dans l'équation (f), donnera une valeur plus approchée de $gy - V'$; mais on peut s'en tenir à la première approximation.

La partie de V' relative à l'action de l'astre L est de la forme

$$k(1+3\cos 2\theta)\cos(it+A), \quad \text{ou} \quad 6k(\mu^2-\tfrac{1}{3})\cos(it+A).$$

Soit $Q(\mu^2-\frac{1}{3})\cos(it+A)$ la partie correspondante de y; la partie correspondante de V', due à l'action de la couche aqueuse dont, le rayon

intérieur étant 1, le rayon extérieur est $1+\alpha y$, sera

$$\frac{3g}{5\rho}Q(\mu^2-\tfrac{1}{3})\cos(it+A);$$

l'équation $gy-V'=0$ donnera donc

$$0=\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)Q(\mu^2-\tfrac{1}{3})-\frac{6k}{g}(\mu^2-\tfrac{1}{3}),$$

d'où l'on tire

$$Q=\frac{6k}{g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)},$$

et par conséquent

$$\alpha y=\frac{6\alpha k(\mu^2-\frac{1}{3})\cos(it+A)}{g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}.$$

La somme de tous les termes $\alpha k\cos(it+A)$ étant égale à

$$\frac{L}{4r^3}(\sin^2 v-\tfrac{1}{2}\cos^2 v),$$

la valeur entière de αy, relative aux oscillations de la première espèce dues à l'action de l'astre L, sera donc

$$\alpha y=\frac{L(\sin^2 v-\frac{1}{2}\cos^2 v)(1+3\cos 2\theta)}{4r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}.$$

Cette valeur est celle qui aurait lieu si v et r étaient rigoureusement constants, et si le fluide prenait à chaque instant la figure qui convient à l'état d'équilibre; car, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ étant nuls dans le cas de l'équilibre, les équations différentielles en u et v se réduisent à celle-ci, $0=gy-V'$; on peut donc, lorsque les variations de r et de v sont très-lentes, déterminer les oscillations de la première espèce comme si le fluide se mettait à chaque instant en équilibre sous l'action de l'astre qui l'attire; l'erreur est d'autant moindre que l'astre se meut avec plus de lenteur; elle est par conséquent insensible pour le Soleil. Elle peut être sen-

sible pour la Lune, à cause de la rapidité de son mouvement dans son orbite; mais, comme les oscillations de la première espèce sont très-petites par les observations, on pourra employer pour la Lune elle-même la valeur précédente de αy.

Quoique nous soyons parvenus à ces résultats dans la supposition d'une résistance proportionnelle à la vitesse, il est clair qu'ils ont lieu quelle que soit la loi de la résistance. En général, on peut les adopter sans erreur sensible toutes les fois que le fluide dérangé de son état d'équilibre reviendrait, en vertu de la résistance qu'il éprouve, à cet état dans un temps moindre que celui d'une révolution de l'astre.

Des oscillations de la seconde espèce.

7. La partie de l'action de l'astre L qui produit ces oscillations est, par le n° 4, égale à

$$\frac{3L}{r^3}\sin v\cos v\sin\theta\cos\theta\cos(nt+\varpi-\psi).$$

Le développement de cette fonction en sinus et cosinus d'angles proportionnels au temps donne une suite de termes de la forme $ak\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(it+\varpi-A)$, i étant fort peu différent de n, à cause de la lenteur du mouvement de l'astre par rapport au mouvement de rotation de la Terre. Reprenons maintenant l'équation (4) du n° 3, en y supposant $s=1$ et

$$z=\frac{l(1-q\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2};$$

supposons, de plus, que a soit exprimé par la suite

$$\mu\sqrt{1-\mu^2}\,(P^{(0)}+P^{(2)}+P^{(4)}+\ldots+P^{(2f-2)}),$$

$P^{(0)}, P^{(2)},\ldots$ étant des fonctions de μ^2, telles qu'en désignant par $Y^{(2f)}$ la fonction $\mu\sqrt{1-\mu^2}\,P^{(2f-2)}$, on ait, quel que soit f,

$$0=\frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial Y^{(2f)}}{\partial\mu}}{\partial\mu}-\frac{Y^{(2f)}}{1-\mu^2}+2f(2f+1)\,Y^{(2f)}.$$

La partie de a' relative à l'action de la couche aqueuse dont, le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1+\alpha y$ sera, par ce qui précède,

$$-\frac{3\mu\sqrt{1-\mu^2}}{\rho}\left(\tfrac{1}{5}P^{(0)}+\tfrac{1}{9}P^{(2)}+\tfrac{1}{13}P^{(4)}+\ldots+\frac{1}{4f+1}P^{(2f-2)}\right);$$

la partie de a' relative à l'action de l'astre L est $-\frac{k}{g}\mu\sqrt{1-\mu^2}$; on aura donc

$$a'=\mu\sqrt{1-\mu^2}\left[\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(0)}+\left(1-\frac{3}{9\rho}\right)P^{(2)}+\ldots+\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)P^{(2f-2)}-\frac{k}{g}\right].$$

Supposons que les constantes indéterminées qui multiplient chacune des fonctions $P^{(0)}$, $P^{(2)}$,... soient telles que la fonction $\frac{2n}{i}\mu a'-\frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)$ soit divisible par $i^2-4n^2\mu^2$, ce qui ne demande qu'une seule équation de condition entre ces indéterminées; alors le second membre de l'équation (4) n'aura plus de dénominateur; car, en ne considérant dans ce second membre que les termes qui ont $\sqrt{1-\mu^2}$ pour diviseur, et supposant $a'=F\mu\sqrt{1-\mu^2}$, F étant une fonction rationnelle et entière de μ^2, les trois parties de ce second membre deviennent

$$-\left(\frac{2n}{i}+1\right)\frac{gz\mu^3F}{\sqrt{1-\mu^2}}+\frac{2n}{i}\left(\frac{2n}{i}+1\right)\frac{gz\mu^3F}{\sqrt{1-\mu^2}}+\frac{(i^2-4n^2\mu^2)gz\mu F}{i^2\sqrt{1-\mu^2}},$$

ou $gz\mu F\sqrt{1-\mu^2}$; d'où il suit que ce second membre n'a point $\sqrt{1-\mu^2}$ au dénominateur. En substituant donc, dans cette équation, pour a et a' leurs valeurs, et en la divisant par $\mu\sqrt{1-\mu^2}$, la comparaison des puissances semblables de μ donnera f équations de condition qui, réunies à la précédente, formeront $f+1$ équations de condition à satisfaire; mais le nombre des indéterminées, en y comprenant q, est $f+1$; on aura donc autant d'indéterminées que d'équations.

Pour avoir la valeur de q, désignons par $Q\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$ le terme de l'expression de a le plus élevé en μ; le terme semblable de l'expres-

sion de a' sera

$$Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2},$$

ce qui donne

$$\frac{lgq}{2n^2}\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$$

pour le terme semblable du second membre de l'équation (4); en l'égalant au terme correspondant de a, on aura

$$q=\frac{2n^2}{lg\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)};$$

ainsi, la profondeur de la mer étant supposée égale à

$$l-\frac{2n^2\mu^2}{g\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)},$$

on pourra déterminer par l'analyse précédente les oscillations de la seconde espèce.

Cette loi de profondeur dépend de la valeur de i, et par conséquent elle n'est pas la même pour tous les termes dans lesquels l'action de l'astre peut se développer; cependant cette identité est indispensable pour qu'une loi de profondeur puisse être admise. Mais on doit observer que, i étant peu différent de n, on peut supposer ici $\frac{n}{i}=1$, et alors la loi précédente de profondeur de la mer devient indépendante de i; elle est même à très-peu près égale à celle que nous avons trouvée dans le numéro précédent pour les oscillations de la première espèce, si f est assez grand pour que l'on puisse négliger $\frac{n}{i}$ vis-à-vis de $2f^2+f$.

8. La considération de i à fort peu près égal à n nous conduit à une expression de a très-simple, et fort remarquable en ce qu'elle donne l'explication d'un des principaux phénomènes des marées. Si l'on fait $i=n$, on a

$$z=\frac{l(1-q\mu^2)}{n^2(1-4\mu^2)}.$$

Supposons maintenant, dans l'équation (4) du n° 3, $s=1$, $i=n$ et $a=Q\mu\sqrt{1-\mu^2}$, Q étant un coefficient indépendant de μ; on aura, par ce qui précède,

$$a'=\left[\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)Q-\frac{k}{g}\right]\mu\sqrt{1-\mu^2},$$

ce qui donne

$$\frac{2n}{i}\mu a'-\frac{\partial a'}{\partial\mu}(1-\mu^2)=-\frac{1-4\mu^2}{\mu}a';$$

le second membre de l'équation (4) se réduit ainsi au terme $\frac{2lgqa'}{n^2}$. En égalant cette quantité au premier membre ou à la valeur supposée pour a, on aura

$$Q=\frac{2lgq}{n^2}\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)Q-\frac{2lq}{n^2}k,$$

d'où l'on tire

$$Q=\frac{2lqk}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}.$$

La partie de αy correspondante au terme $\alpha k\sin\theta\cos\theta\cos(it+\varpi-A)$ sera donc

$$\frac{2lq\sin\theta\cos\theta}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}\alpha k\cos(it+\varpi-A);$$

mais la somme des termes $\alpha k\cos(it+\varpi-A)$ est, par ce qui précède, le développement de la fonction

$$\frac{3L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi);$$

on aura donc, pour la partie entière de αy relative aux oscillations de la seconde espèce,

$$\frac{\frac{6L}{r^3}lq\sin\theta\cos\theta\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2},$$

et cette valeur a lieu généralement, quel que soit q, c'est-à-dire quelle que soit la loi de la profondeur de la mer, pourvu que le sphéroïde qu'elle recouvre soit un ellipsoïde de révolution.

La différence des deux marées d'un même jour dépend des oscillations de la seconde espèce. En effet, lorsque l'astre L passe au méridien supérieur de la molécule, on a $nt + \varpi - \psi = 0$, et lorsqu'il passe au méridien inférieur, on a $nt + \varpi - \psi = 200°$; ainsi l'excès de la marée dans le premier cas sur la marée dans le second cas est

$$\frac{\frac{12L}{r^3} lq \sin\theta \cos\theta \sin v \cos v}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

Les observations faites dans nos ports nous montrent que cette différence est très-petite, ce qui suppose lq très-petit par rapport à $\frac{n^2}{g}$; cette supposition donne ainsi une explication fort simple de ce phénomène. Dans ce cas, le dénominateur de la fraction précédente est négatif, et si, comme les observations semblent l'indiquer, la marée supérieure l'emporte sur la marée inférieure, lq est une quantité négative, et la mer est un peu plus profonde aux pôles qu'à l'équateur. Mais cette conséquence est subordonnée à l'hypothèse d'un fluide répandu régulièrement sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, ce qui n'est point le cas de la nature.

Si l'on substitue pour Q sa valeur dans l'expression de a', on aura

$$a' = \frac{\frac{n^2 k}{g} \mu\sqrt{1-\mu^2}}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

Cette valeur, substituée dans les expressions de b et de c du n° 3, donne, en supposant $s = 1$ et $i = n$,

$$b = \frac{-k}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2},$$

$$c = \frac{k\mu}{\left[2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2\right]\sqrt{1-\mu^2}},$$

d'où il suit que la partie de αu relative aux oscillations de la seconde espèce est

$$-\frac{\frac{3L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2},$$

et que la partie de αv relative aux mêmes oscillations est

$$\frac{\frac{3L}{r^3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi)}{2lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2}.$$

Des oscillations de la troisième espèce.

9. La partie de l'action de l'astre L qui produit ces oscillations est, par le n° 4, égale à

$$\frac{3L}{4r^3}\sin^2\theta\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi).$$

Le développement de cette fonction en cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps donne une suite de termes de la forme $2k\sin^2\theta\cos(it+2\varpi-A)$, i étant peu différent de $2n$.

Reprenons maintenant l'équation (4) du n° 3, en y supposant $s=2$ et

$$z=\frac{l(1-q\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}.$$

Supposons, de plus, que a soit exprimé par la suite

$$(1-\mu^2)(P^{(0)}+P^{(2)}+P^{(4)}+\ldots+P^{(2f-2)}),$$

$P^{(0)}, P^{(2)},\ldots$ étant des fonctions rationnelles et entières de μ^2, telles qu'en désignant par $Y^{(2f)}$ la fonction $(1-\mu^2)P^{(2f-2)}$, on ait

$$0=\frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial Y^{(2f)}}{\partial\mu}}{\partial\mu}-\frac{4Y^{(2f)}}{1-\mu^2}+2f(2f+1)Y^{(2f)}.$$

La partie de a' relative à l'action de la couche aqueuse dont, le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1 + \alpha y$ sera, par ce qui précède,

$$-\frac{3(1-\mu^2)}{\rho}\left(\tfrac{1}{5}P^{(0)} + \tfrac{1}{9}P^{(2)} + \tfrac{1}{13}P^{(4)} + \ldots + \frac{1}{4f+1}P^{(2f-2)}\right);$$

la partie de a' relative à l'action de l'astre L est $-\frac{k}{g}(1-\mu^2)$; on aura donc

$$a' = (1-\mu^2)\left[\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(0)} + \left(1-\frac{3}{9\rho}\right)P^{(2)} + \ldots + \left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)P^{(2f-2)} - \frac{k}{g}\right].$$

Supposons que les constantes indéterminées qui multiplient chacune des fonctions $P^{(0)}$, $P^{(2)}$,... soient telles que la fonction $\frac{4n}{i}\mu a' - \frac{\partial a'}{\partial \mu}(1-\mu^2)$ soit divisible par $i^2 - 4n^2\mu^2$, ce qui ne demande qu'une seule équation de condition entre ces indéterminées; alors le second membre de l'équation (4) n'aura plus de dénominateur; de plus, il sera divisible par $1-\mu^2$, comme le premier; car, en supposant $a' = (1-\mu^2)F$, et ne considérant que les termes qui ne sont point divisibles par $1-\mu^2$, les trois parties de ce second membre deviennent

$$-\frac{2n+i}{i}\mu^2.4gzF + \frac{2n+i}{i}\mu^2.\frac{8n}{i}gzF + \frac{i^2-4n^2\mu^2}{i^2}\cdot 4gzF,$$

ou $4(1-\mu^2)gzF$; et par conséquent leur somme est divisible par $1-\mu^2$. En substituant pour a et a' leurs valeurs précédentes dans l'équation (4), et en la divisant par $1-\mu^2$, la comparaison des coefficients des puissances de μ donnera f équations, qui, réunies à la précédente, formeront $f+1$ équations de condition à satisfaire; le nombre des indéterminées, en y comprenant q, est pareillement $f+1$; on aura donc autant d'indéterminées que d'équations.

Pour avoir la valeur de q, nommons $Q\mu^{2f-2}$ le terme le plus élevé en μ de $P^{(2f-2)}$; le terme correspondant de a' sera

$$(1-\mu^2)\mu^{2f-2}Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right);$$

le terme correspondant du second membre de l'équation (4) sera

$$\frac{lgq}{2n^2}\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)Q(1-\mu^2)\mu^{2f-2};$$

en l'égalant au terme correspondant du premier membre ou à

$$Q(1-\mu^2)\mu^{2f-2},$$

on aura

$$q=\frac{2n^2}{lg\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)};$$

ainsi, en supposant la profondeur de la mer égale à

$$l-\frac{2n^2\mu^2}{g\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)},$$

on pourra déterminer par l'analyse précédente les oscillations de la troisième espèce. Cette expression est différente pour les diverses valeurs dont i est susceptible; mais on doit observer que, i étant à fort peu près égal à $2n$, on peut supposer $\frac{2n}{i}=1$, et alors on a pour la profondeur de la mer la même expression que nous avons trouvée dans le n° 7, relativement aux oscillations de la seconde espèce, ce qui est nécessaire pour que cette loi de profondeur puisse être admise. On peut même faire coïncider cette profondeur avec celle que nous avons trouvée dans le n° 5, relativement aux oscillations de la première espèce, en supposant f assez grand pour pouvoir négliger l'unité, eu égard à $2f^2+f$; mais nous avons observé dans le n° 6 que les résistances éprouvées par la mer dans ses mouvements rendent les oscillations de la première espèce indépendantes de la loi de profondeur de la mer, en sorte qu'il suffit de considérer les lois de profondeur dans lesquelles on peut déterminer à la fois les oscillations de la seconde et de la troisième espèce.

10. Nous avons remarqué dans le n° 8 que, pour satisfaire aux observations, il faut supposer la profondeur de la mer à fort peu près

constante; nous allons déterminer, dans cette hypothèse, les oscillations de la troisième espèce. Nous supposerons, de plus, que r, ψ et v varient avec assez de lenteur, par rapport aux variations de l'angle $2nt$, pour que l'on puisse les traiter comme constants. Nous négligerons encore la fraction $\frac{1}{\rho}$, qui exprime le rapport de la densité de la mer à la moyenne densité de la Terre, rapport qui paraît assez petit, par les observations faites sur l'attraction des montagnes. Cela posé, en faisant

$$y = a\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi),$$

on aura

$$\alpha a' = \alpha a - \frac{3L}{4r^3 g}(1-\mu^2)\cos^2 v;$$

l'équation (4) du n° 3 deviendra donc, en observant que $z = \frac{l}{4n^2(1-\mu^2)}$,

$$\frac{4n^2}{lg}\alpha a(1-\mu^2)^2 = -\alpha\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2}(1-\mu^2)^2 + (6+2\mu^2)\alpha a - \frac{6L}{r^3 g}(1-\mu^2)\cos^2 v.$$

On peut donner à cette équation une forme plus simple, en y faisant $1-\mu^2 = x^2$, et en supposant dx constant; on aura ainsi

$$0 = x^2(1-x^2)\alpha\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - x\alpha\frac{\partial a}{\partial x} - 2\alpha a\left(4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg}x^4\right) + \frac{6L}{r^3 g}x^2\cos^2 v.$$

Pour satisfaire à cette équation, nous ferons

$$\alpha a = A^{(1)}x^2 + A^{(2)}x^4 + A^{(3)}x^6 + \dots.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation différentielle précédente, donnera d'abord, en comparant les coefficients de x^2,

$$A^{(1)} = \frac{3L}{4r^3 g}\cos^2 v.$$

La comparaison des coefficients de x^4 donnera l'équation identique $0 = 0$; enfin la comparaison des coefficients de x^{2f+4}, f étant égal ou

plus grand que l'unité, donnera

$$0 = A^{(f+2)}(2f^2+6f) - A^{(f+1)}(2f^2+3f) + \frac{2n^2}{lg}A^{(f)}.$$

On aura, au moyen de cette équation, les valeurs de $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, ..., lorsque $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ seront connus. En la mettant sous cette forme

$$\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}} = \frac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2+3f-(2f^2+6f)\frac{A^{(f+2)}}{A^{(f+1)}}},$$

on en tirera

$$\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2+3f-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(f^2+3f)}{2(f+1)^2+3(f+1)-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}[(f+1)^2+3(f+1)]}{2(f+2)^2+3(f+2)-\dots}}},$$

ce qui donne, en supposant $f=1$,

$$A^{(2)} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}A^{(1)}}{2.1^2+3.1-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(1^2+3.1)}{2.2^2+3.2-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(2^2+3.2)}{2.3^2+3.3-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(3^2+3.3)}{2.4^2+3.4-\dots}}}}.$$

On aura ainsi $A^{(2)}$ au moyen de $A^{(1)}$; $\frac{n^2}{g}$ est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur; ce rapport est $\frac{1}{289}$. En supposant donc successivement $\frac{2n^2}{lg}=20$, $\frac{2n^2}{lg}=5$, $\frac{2n^2}{lg}=\frac{5}{2}$, les profondeurs l correspondantes de la mer seront $\frac{1}{2890}$, $\frac{1}{722,5}$, $\frac{1}{361,25}$, le rayon terrestre étant pris pour unité. Cela posé, on trouvera, par l'analyse pré-

cédente, que les valeurs correspondantes de αa sont

$$\alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \left\{ \begin{array}{l} 1,0000 + 20,1862.x^2 + 10,1164.x^4 \\ \quad + 13,1047.x^6 + 15,4488.x^8 + 7,4581.x^{10} \\ \quad + 2,1975.x^{12} + 0,4501.x^{14} + 0,0687.x^{16} \\ \quad + 0,0082.x^{18} + 0,0008.x^{20} + 0,0001.x^{22} \end{array} \right\},$$

$$\alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \left\{ \begin{array}{l} 1,0000 + 6,1960.x^2 + 3,2474.x^4 \\ \quad + 0,7238.x^6 + 0,0919.x^8 + 0,0076.x^{10} \\ \quad + 0,0004.x^{12} \end{array} \right\},$$

$$\alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \left\{ \begin{array}{l} 1,0000 + 0,7504.x^2 + 0,1566.x^4 \\ \quad + 0,01574.x^6 + 0,0009.x^8 \end{array} \right\}.$$

11. Réunissons maintenant les diverses oscillations de la mer. Celles de la première espèce sont, par le n° 6, en négligeant la densité de la mer eu égard à celle de la Terre,

$$\frac{L}{4r^3 g} (\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\theta).$$

On a vu que les oscillations de la seconde espèce sont nulles lorsque la profondeur de la mer est partout la même; enfin, les oscillations de la troisième espèce sont exprimées par $\alpha a \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi)$. La somme de ces oscillations est la valeur entière de αy; on aura donc

$$\alpha y = \frac{L}{4r^3 g} (\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\theta) + \alpha a \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

Si l'on suppose que L est le Soleil, que r exprime sa moyenne distance à la Terre, et que mt exprime son moyen mouvement sidéral, on aura, par la théorie des forces centrales,

$$\frac{3L}{4r^3 g} = \frac{3n^2}{4g} \frac{m^2}{n^2} = \frac{3}{4.289.(366,26)^2}.$$

Cette quantité est une fraction du rayon terrestre, que nous avons pris pour unité; en la multipliant donc par le nombre de mètres que ce rayon renferme, on aura

$$\frac{3L}{4r^3 g} = 0^m,12316,$$

et il faudra faire varier cette quantité comme le cube du rapport de la moyenne distance du Soleil à la Terre à sa distance actuelle.

Si l'on nomme e le rapport de la masse de la Lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la Terre, à la masse du Soleil, divisée par le cube de sa moyenne distance, on aura, pour la Lune,

$$\frac{3L}{4r^3g} = e.0^{m},12316,$$

et il faudra faire varier cette quantité comme le cube du rapport de la moyenne distance de la Lune à sa distance actuelle.

Il suit de là que, si l'on désigne par v' et ψ' la déclinaison et l'ascension droite de la Lune, on aura, en vertu de son action réunie à celle du Soleil, et lorsque la profondeur l de la mer est égale à $\frac{1}{10}\frac{n^2}{g}$, ou à $\frac{1}{2890}$ du rayon terrestre,

$$\begin{aligned}\alpha y = {} & 0^{m},12316 \cdot \frac{1+3\cos 2\theta}{3}\left(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + e\sin^2 v' - \tfrac{1}{2}e\cos^2 v'\right)\\ & + 0^{m},12316\left\{\begin{matrix} 1,0000 + 20,1862.x^2 \\ + 10,1164.x^4 - 13,1047.x^6 \\ - 15,4488.x^8 - 7,4581.x^{10} \\ - 2,1975.x^{12} - 0,4501.x^{14} \\ - 0,0687.x^{16} - 0,0082.x^{18} \\ - 0,0008.x^{20} - 0,0001.x^{22} \end{matrix}\right\} x^2\left[\cos^2 v\cos(2nt+2\varpi-2\psi) + e\cos^2 v'\cos(2nt+2\varpi-2\psi')\right]\end{aligned}$$

Nous verrons ci-après que $e = 3$ dans les moyennes distances du Soleil et de la Lune; en supposant donc ces deux astres à ces distances, et de plus en opposition ou en conjonction dans le plan de l'équateur, la haute et la basse mer répondront au cas où l'angle $2nt + 2\varpi - 2\psi$ sera nul ou égal à 200 degrés; on trouve ainsi $7^{m},34$ pour la différence de la haute à la basse mer sous l'équateur où $x = 1$. Mais, par une singularité remarquable, la basse mer a lieu lorsque les deux astres sont dans le méridien, tandis que la haute mer arrive lorsqu'ils sont à l'horizon, en sorte que l'océan s'abaisse à l'équateur sous l'astre qui l'attire. En avançant de l'équateur aux pôles, on trouve que, vers

le dix-huitième degré de latitude tant boréale qu'australe, la différence de la haute à la basse mer est nulle; d'où il suit que, dans toute la zone comprise entre les deux parallèles de 18 degrés, la basse mer a lieu lors du passage des astres au méridien, et qu'au delà de ces parallèles la haute mer a lieu à ce même instant.

Dans le cas de l égal à $\frac{4}{10}\frac{n^2}{g}$, ou d'une profondeur de la mer égale à $\frac{1}{722,5}$, on trouve

$$\alpha y = 0^m,12316 \cdot \frac{1+3\cos 2\theta}{3}(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + e\sin^2 v' - \tfrac{1}{2}e\cos^2 v')$$

$$+0^m,12316\left\{\begin{array}{l} 1,0000 + 6,1960.x^2 \\ +3,2474.x^4 + 0,7238.x^6 \\ +0,0919.x^8 + 0,0076.x^{10} \\ +0,0004.x^{12} \end{array}\right\} x^2[\cos^2 v\cos(2nt+2\varpi-2\psi) + e\cos^2 v'\cos(2nt+2\varpi-2\psi')],$$

et l'on aura, dans les mêmes suppositions que ci-dessus, $11^m,05$ pour la différence de la haute à la basse mer sous l'équateur; mais ici l'instant de la haute mer est partout celui du passage des astres au méridien.

Enfin, dans le cas de $l = \frac{8}{10}\frac{n^2}{g}$, ou d'une profondeur de la mer double de la précédente, on trouve

$$\alpha y = 0^m,12316 \cdot \frac{1+3\cos 2\theta}{3}(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + e\sin^2 v' - \tfrac{1}{2}e\cos^2 v')$$

$$+0^m,12316\left\{\begin{array}{l} 1,0000 + 0,7504.x^2 \\ +0,1566.x^4 + 0,01574.x^6 \\ +0,0009.x^8 \end{array}\right\} x^2[\cos^2 v\cos(2nt+2\varpi-2\psi) + e\cos^2 v'\cos(2nt+2\varpi-2\psi')],$$

et l'on aura, dans les mêmes suppositions que ci-dessus, $1^m,90$ pour la différence de la haute à la basse mer, à l'équateur.

Si l'on augmente la profondeur de la mer, la valeur de αy diminue; mais cette diminution a une limite, et la valeur de αa se réduit bientôt à $\frac{3L}{4r^3 g}x^2\cos^2 v$; on trouve alors, lorsque les deux astres sont en conjonction dans le plan de l'équateur, $0^m,98528$ pour la différence de la

haute à la basse mer, à l'équateur; cette quantité est donc la limite de cette différence.

12. La limite que nous venons d'assigner répond au cas où la mer prend à chaque instant la figure d'équilibre qui convient aux forces qui l'animent. Dans cette hypothèse, la valeur de αy peut se déterminer fort simplement, quelles que soient la loi de profondeur et la densité de la mer. En effet, elle revient à supposer, dans l'équation (2) du n° **1**, que les mouvements de l'astre et de la rotation de la Terre sont assez lents pour que l'on puisse négliger les quantités

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad n\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad n\frac{\partial v}{\partial t},$$

et alors cette équation donne, en l'intégrant,

$$\alpha y = \frac{\alpha V'}{g}.$$

La partie de $\alpha V'$ dépendante de l'action de l'astre L est, par le n° **4**, égale à

$$\begin{aligned}&\frac{L}{4r^3}(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\theta)\\ &\quad + \frac{3L}{r^3}\sin v\cos v\sin\theta\cos\theta\cos(nt + \varpi - \psi)\\ &\quad + \frac{3L}{4r^3}\cos^2 v\sin^2\theta\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).\end{aligned}$$

Supposons que la partie correspondante de αy soit égale à cette quantité multipliée par une indéterminée Q; ce produit étant de la forme $Y^{(2)}$, ou satisfaisant pour $Y^{(2)}$ à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\dfrac{\partial Y^{(2)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 Y^{(2)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + 6Y^{(2)},$$

la partie de $\alpha V'$ correspondante à l'action de la couche fluide dont, le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1 + \alpha y$, sera par

le n° 2, $\frac{4\pi}{5}Y^{(2)}$ ou $\frac{3}{5\rho}gY^{(2)}$; l'équation $\alpha g y = \alpha V'$ donnera donc

$$\alpha y = \frac{L}{4r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v)(1 + 3\cos 2\theta)$$
$$+ \frac{3L}{r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\sin v \cos v \sin\theta\cos\theta\cos(nt + \varpi - \psi)$$
$$+ \frac{3L}{4r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\cos^2 v \sin^2\theta\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

Dans l'hypothèse que nous considérons, si le Soleil et la Lune sont en conjonction avec la même déclinaison, alors l'excès de la haute mer relative à midi sur la basse mer qui la suit sera

$$\frac{3L}{2r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}(1+e)\sin^2\theta\cos^2 v(1 + 2\tan v\cot\theta),$$

et l'excès de la haute mer relative à minuit sur la même basse mer sera, à très-peu près,

$$\frac{3L}{2r^3 g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}(1+e)\sin^2\theta\cos^2 v(1 - 2\tan v\cot\theta);$$

ces deux excès seraient donc entre eux dans le rapport de $1 + 2\tan v\cot\theta$ à $1 - 2\tan v\cot\theta$; ainsi, pour Brest, où $\theta = 46°26'$ à peu près, si les deux astres ont 23 degrés de déclinaison boréale, ces deux excès seraient dans le rapport de 1,7953 à 0,2047, c'est-à-dire que le premier serait environ huit fois plus grand que le second. Suivant les observations, ces deux excès sont peu différents l'un de l'autre; l'hypothèse dont il s'agit est donc fort éloignée de représenter sur ce point les observations, et l'on voit qu'il est indispensable, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, d'avoir égard au mouvement de rotation de la Terre et à celui des astres attirants.

CHAPITRE II.

DE LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES MERS.

13. Nous avons observé, dans le n° 2, que si, la Terre n'ayant point de mouvement de rotation, la profondeur de la mer est constante, l'équilibre est stable toutes les fois que la densité moyenne de la Terre surpasse celle de la mer; nous allons généraliser ce théorème, et faire voir qu'il a lieu quels que soient la loi de profondeur de la mer et le mouvement de rotation de la Terre.

Reprenons les équations générales du mouvement de la mer, données dans le n° 36 du premier Livre,

$$(5) \qquad 0 = \frac{\partial . r^2 s}{\partial r} + r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \varpi} - \frac{\partial . u \sqrt{1-\mu^2}}{d\mu} \right),$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial v}{\partial t} = g\,\frac{\partial y'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2},$$

$$(7) \qquad (1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial u}{\partial t} = -g\,\frac{\partial y'}{\partial \varpi},$$

ces équations étant relatives à une molécule quelconque de l'intérieur ou de la surface de la mer, déterminée par les coordonnées $\theta + \alpha u$, $\varpi + \alpha v$ et $r + \alpha s$; $r + \alpha s$ étant le rayon mené du centre de gravité de la Terre à la molécule, et gy' étant égal à $gy - V'$.

Si l'on intègre l'équation (5) depuis la surface du sphéroïde recouvert par la mer jusqu'à celle de la mer, on aura

$$r'^2 s' - r_{\prime}^2 s_{\prime} = \int r^2 dr \left(\frac{\partial . u \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial v}{\partial \varpi} \right),$$

r' et s' étant relatifs à la surface de la mer, et $r_{,}$ et $s_{,}$ se rapportant à la surface du sphéroïde. En représentant par γ la profondeur très-petite de la mer, on aura $r' = r_{,} + \gamma$, ce qui donne

$$r'^2 s' - r_{,}^2 s_{,} = r_{,}^2 (s' - s_{,}) + 2 r_{,} \gamma s' + \gamma^2 s',$$

et par conséquent, le rayon moyen de la Terre étant pris pour unité, on aura, à très-peu près,

$$r'^2 s' - r_{,}^2 s_{,} = s' - s_{,};$$

or on a

$$\alpha s' = \alpha y + \alpha u' \frac{\partial r'}{\partial \theta} + \alpha v' \frac{\partial r'}{\partial \varpi},$$

u' et v' étant relatifs à la surface de la mer; on a pareillement

$$\alpha s_{,} = \alpha u_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \theta} + \alpha v_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \varpi},$$

$u_{,}$ et $v_{,}$ étant relatifs à la surface du sphéroïde; on a donc

$$s' - s_{,} = y - u' \frac{\partial r'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} + u_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} - v' \frac{\partial r'}{\partial \varpi} - v_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \varpi},$$

partant, on aura, à très-peu près,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & u' \frac{\partial r'}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} - u_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2} + v' \frac{\partial r'}{\partial \varpi} + v_{,} \frac{\partial r_{,}}{\partial \varpi} \\ & + \int dr \left(\frac{\partial . u \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial v}{\partial \varpi} \right). \end{aligned} \right.$$

Cette équation n'est pas restreinte, comme l'équation (1) du n° **1**, à la condition que u et v soient les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon; il est facile de voir qu'en remplissant cette condition, ces deux équations coïncident.

Maintenant, si l'on ajoute l'équation (6), multipliée par $dr\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial u}{\partial t}$, à l'équation (7), multipliée par $dr\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial v}{\partial t}$, on aura, en l'intégrant,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iiint dr\, d\mu\, d\varpi \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (1-\mu^2) \right] \\ & = \iiint dr\, d\mu\, d\varpi \left(g \frac{\partial y'}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial t} \sqrt{1-\mu^2} - g \frac{\partial y'}{\partial \varpi} \frac{\partial v}{\partial t} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour étendre les intégrales à la masse entière du fluide, il faut les prendre depuis $r = r_{,}$ jusqu'à $r = r'$, depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$. En intégrant par rapport à μ, et en observant que y' est indépendant de r, on aura

$$\int\int dr\,d\mu\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial y'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} = \int y'\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\sqrt{1-\mu^2} - \int y'\,\frac{\partial.\int\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu}\,d\mu + \text{const.}$$

Aux deux extrémités de l'intégrale, où $\mu = -1$ et $\mu = 1$, on a

$$y'\,\frac{\partial u}{\partial t}\sqrt{1-\mu^2} = 0;$$

donc

$$0 = \int y'\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\sqrt{1-\mu^2} + \text{const.},$$

et par conséquent

$$\int\int dr\,d\mu\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial y'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} = -\int y'\,\frac{\partial.\int\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu}\,d\mu;$$

or on a

$$\frac{\partial.\int\frac{\partial u}{\partial t}\,dr\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} = \int dr\,\frac{\partial.\frac{\partial u}{\partial t}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} + \frac{\partial u'}{\partial t}\,\frac{\partial r'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial u_{,}}{\partial t}\,\frac{\partial r_{,}}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2};$$

partant,

$$\int\int\int dr\,d\mu\,d\varpi\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial y'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2}$$

$$= \int\int y'\,d\mu\,d\varpi\left(\frac{\partial u_{,}}{\partial t}\,\frac{\partial r_{,}}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial u'}{\partial t}\,\frac{\partial r'}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} - \int dr\,\frac{\partial.\frac{\partial u}{\partial t}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu}\right).$$

Pareillement, si l'on intègre relativement à ϖ, on a

$$\int\int dr\,d\varpi\,\frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial y'}{\partial \varpi} = \int y'\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dr - \int y'\,\frac{\partial.\int\frac{\partial v}{\partial t}\,dr}{\partial \varpi}\,d\varpi + \text{const.}$$

Aux deux extrémités de l'intégrale, où $\varpi = 0$ et $\varpi = 2\pi$, la valeur de

$y'\frac{\partial v}{\partial t}$ est la même, puisqu'elle se rapporte à la même molécule; on a donc

$$\int y'\frac{\partial v}{\partial t}dr + \text{const.} = 0;$$

partant,

$$\int\int dr\,d\varpi\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial\varpi} = -\int y'\frac{\partial.\int\frac{\partial v}{\partial t}dr}{\partial\varpi}d\varpi;$$

or on a

$$\frac{\partial.\int\frac{\partial v}{\partial t}dr}{\partial\varpi} = \int dr\frac{\partial^2 v}{\partial\varpi\,\partial t} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial\varpi} - \frac{\partial v_{,}}{\partial t}\frac{\partial r_{,}}{\partial\varpi};$$

donc

$$\int\int dr\,d\varpi\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial\varpi} = -\int y'd\varpi\left(\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial\varpi} - \frac{\partial v_{,}}{\partial t}\frac{\partial r_{,}}{\partial\varpi} + \int dr\frac{\partial^2 v}{\partial\varpi\,\partial t}\right),$$

et par conséquent

$$\int\int\int dr\,d\mu\,d\varpi\left(g\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - g\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial\varpi}\right)$$

$$= \int\int gy'd\mu\,d\varpi\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial u_{,}}{\partial t}\frac{\partial r_{,}}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial\varpi}\\ -\frac{\partial v_{,}}{\partial t}\frac{\partial r_{,}}{\partial\varpi} - \int dr\left(\frac{\partial.\frac{\partial u}{\partial t}\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \frac{\partial^2 v}{\partial\varpi\,\partial t}\right)\end{array}\right\}.$$

Le second membre de cette équation se réduit, en vertu de l'équation (8), au terme $-\int\int gy'\frac{\partial y}{\partial t}d\mu\,d\varpi$; l'équation (9) devient donc

$$(10)\qquad \int\int\int dr\,d\mu\,d\varpi\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(1-\mu^2)\right] = -\int\int d\mu\,d\varpi\,gy'\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Nous ferons abstraction ici de l'action des astres, pour ne considérer que l'action mutuelle des molécules de la mer et du sphéroïde terrestre. La valeur de V' est alors due à l'attraction d'une couche aqueuse dont, le rayon intérieur étant r', le rayon extérieur est $r'+\alpha y$, r' étant à très-peu près égal à l'unité. On a vu, dans le n° 2, que, y étant sup-

posé égal à

$$Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots,$$

on a

$$V' = \frac{3g}{\rho}\left(Y^{(0)} + \tfrac{1}{3}Y^{(1)} + \tfrac{1}{5}Y^{(2)} + \tfrac{1}{7}Y^{(3)} + \ldots\right);$$

or on a généralement

$$\int\!\!\int Y^{(i)} Y^{(i')}\, d\mu\, d\varpi = 0,$$

lorsque i et i' sont des nombres différents; on a donc

$$\int\!\!\int y' \frac{\partial y}{\partial t}\, d\mu\, d\varpi = \int\!\!\int d\mu\, d\varpi \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{3}{\rho}\right) Y^{(0)} \frac{\partial Y^{(0)}}{\partial t} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) Y^{(1)} \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial t} \\ + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) Y^{(2)} \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial t} + \left(1 - \frac{3}{7\rho}\right) Y^{(3)} \frac{\partial Y^{(3)}}{\partial t} + \ldots \end{array} \right\}.$$

Par le n° 2, on a $Y^{(0)} = 0$; l'équation (10) devient donc, en l'intégrant par rapport au temps t,

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \int\!\!\int\!\!\int dr\, d\mu\, d\varpi \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 (1 - \mu^2) \right] \\ = M - g \int\!\!\int d\mu\, d\varpi \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) Y^{(1)2} + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) Y^{(2)2} + \left(1 - \frac{3}{7\rho}\right) Y^{(3)2} + \ldots \right], \end{array} \right.$$

M étant une constante arbitraire. Il est facile de voir que le premier membre de cette équation exprime, à très-peu près, la force vive de la masse fluide, en ne considérant que la vitesse relative de ses molécules sur le sphéroïde terrestre.

M est une constante indépendante du temps t, et qui dépend de l'état initial du mouvement de la mer; elle est très-petite, lorsque l'on suppose l'ébranlement primitif peu considérable.

Si ρ est plus grand que l'unité, la fonction

$$-g \int\!\!\int d\mu\, d\varpi \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) Y^{(1)2} + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) Y^{(2)2} + \ldots \right]$$

sera constamment négative; elle sera moindre que M, puisque le premier membre de l'équation précédente est nécessairement positif; $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}, \ldots$ ne doivent donc point contenir d'exponentielles croissantes, ni

d'arcs de cercle; d'où il suit que *l'équilibre de la mer est stable, si sa densité est moindre que la densité moyenne de la Terre.*

14. Si la densité de la mer surpasse la moyenne densité de la Terre, sa figure cesse d'être stable dans un grand nombre de cas. On a vu dans le n° **2** que, la Terre n'ayant point de mouvement de rotation, et la profondeur de la mer étant constante, on peut, si ρ est moindre que l'unité, ébranler ce fluide de manière que l'équation de sa surface renferme le temps sous la forme d'exponentielles croissantes, ce qui est contraire à la stabilité de l'équilibre. La même chose a généralement lieu dans le cas où, la Terre ayant un mouvement de rotation, le sphéroïde que recouvre la mer est un solide de révolution, quelle que soit d'ailleurs la loi de la profondeur de la mer.

Reprenons l'équation (11), dans laquelle nous supposerons que les valeurs de u et de v sont à très-peu près les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon. Supposons qu'à l'origine du mouvement on ait eu $y = h\mu$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Le fluide, abandonné ensuite à sa pesanteur et à l'attraction de ses molécules, a dû prendre un mouvement composé d'une infinité d'oscillations simples, telles que l'on a, par leur réunion,

$$y = a\cos(it + \varepsilon) + a_1\cos(i_1 t + \varepsilon_1) + a_2\cos(i_2 t + \varepsilon_2) + \ldots,$$

a, a_1, a_2, ... étant des fonctions de μ. Les constantes i, i_1, i_2, ..., ε, ε_1, ε_2, ... doivent être telles qu'à l'origine du mouvement, où $t = 0$, on ait eu

$$a\cos\varepsilon + a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos\varepsilon_2 + \ldots = h\mu,$$
$$ai\sin\varepsilon + a_1 i_1\sin\varepsilon_1 + a_2 i_2\sin\varepsilon_2 + \ldots = 0.$$

Les valeurs correspondantes de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et de $\frac{\partial v}{\partial t}$ sont, par le n° 3, de la forme

$$ib\sin(it + \varepsilon) + i_1 b_1\sin(i_1 t + \varepsilon_1) + \ldots,$$
$$ic\cos(it + \varepsilon) + i_1 c_1\cos(i_1 t + \varepsilon_1) + \ldots,$$

et elles doivent se réduire à zéro, lorsque $t = 0$. Cela posé, si l'on substitue les valeurs précédentes dans l'équation (11), elle deviendra, en l'intégrant par rapport à r,

$$
(12)\left\{
\begin{aligned}
&\int\!\!\int \frac{\gamma\, d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma i^2[c^2(1-\mu^2)+b^2] + \int\!\!\int \frac{\gamma\, d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma i^2[c^2(1-\mu^2)-b^2]\cos(2it+2\varepsilon) \\
&\quad + \int\!\!\int \gamma\, d\mu\, d\varpi\, \Sigma i i_1 [b b_1 + c c_1(1-\mu^2)]\cos(it - i_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1) \\
&\quad + \int\!\!\int \gamma\, d\mu\, d\varpi\, \Sigma i i_1 [c c_1(1-\mu^2) - b b_1]\cos(it + i_1 t + \varepsilon + \varepsilon_1) \\
&= M - g\int\!\!\int \frac{d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)P^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)2} + \ldots\right] \\
&\quad - g\int\!\!\int \frac{d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)P^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)2} + \ldots\right]\cos(2it+2\varepsilon) \\
&\quad - g\int\!\!\int d\mu\, d\varpi\, \Sigma\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)P^{(1)}P^{(1)}_1 + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)}P^{(2)}_1 + \ldots\right][\cos(it - i_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1) + \cos(it + i_1 t + \varepsilon +
\end{aligned}
\right.
$$

la caractéristique Σ des intégrales finies s'étendant à toutes les valeurs $i, i_1, \ldots$; $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ sont les coefficients de $\cos(it+\varepsilon)$ dans $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots$; $P^{(1)}_1, P^{(2)}_1, \ldots$ sont les coefficients de $\cos(i_1 t+\varepsilon_1)$ dans les mêmes quantités, et ainsi de suite. La comparaison des termes indépendants de t, dans cette équation, donne

$$
(13)\quad \int\!\!\int \frac{\gamma\, d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma i^2[c^2(1-\mu^2)+b^2] = M - g\int\!\!\int \frac{d\mu\, d\varpi}{2}\, \Sigma\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)P^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)2} + \ldots\right];
$$

on a ensuite

$$
(14)\quad \int\!\!\int \frac{\gamma\, d\mu\, d\varpi}{2}\, i^2[c^2(1-\mu^2)-b^2] = -g\int\!\!\int \frac{d\mu\, d\varpi}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)P^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\rho}\right)P^{(2)2} + \ldots\right];
$$

car le fluide peut avoir séparément chacune des oscillations simples relatives aux coefficients $i, i_1, \ldots$, puisqu'en substituant pour y, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ leurs valeurs précédentes dans les équations (A) et (B) du n° 3, les termes affectés de $\sin(it+\varepsilon)$ et de $\cos(it+\varepsilon)$ doivent se détruire séparément; or, en ne considérant que l'oscillation relative à l'angle $it+\varepsilon$, et supposant nuls tous les termes relatifs aux autres angles, l'équation (12) donne, en comparant les coefficients de $\cos(2it+2\varepsilon)$, l'équation (14); on a donc, en rassemblant toutes les équations semblables

à cette dernière équation,

$$\iint \frac{\gamma\, d\mu\, d\varpi}{2} \Sigma i^2 [c^2(1-\mu^2) - b^2] = -g \iint \frac{d\mu\, d\varpi}{2} \Sigma \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) P^{(1)^2} + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) P^{(2)^2} + \ldots \right].$$

Si l'on retranche cette équation de l'équation (13), on aura

$$\iint \gamma\, d\mu\, d\varpi\, \Sigma i^2 b^2 = M.$$

A l'origine du mouvement, on a, par la supposition, $y = Y^{(1)} = h\mu$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; l'équation (11) donne ainsi

$$0 = M - \tfrac{4}{5}\pi g h^2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right);$$

partant,

$$\iint \gamma\, d\mu\, d\varpi (i^2 b^2 + i_1^2 b_1^2 + \ldots) = \tfrac{4}{5}\pi g \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) h^2.$$

Si ρ est moindre que l'unité, ou, ce qui revient au même, si la densité de la mer surpasse la moyenne densité de la Terre, le second membre de cette équation est négatif; le premier membre est donc pareillement négatif, ce qui est impossible, tant que i^2, i_1^2, i_2^2,... sont positifs; ainsi, dans ce cas, quelqu'une de ces quantités est négative, et par conséquent l'expression de y renferme des exponentielles, et l'équilibre n'est point stable.

CHAPITRE III.

DE LA MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD, DANS LA THÉORIE DU FLUX ET DU REFLUX DE LA MER, AUX DIVERSES CIRCONSTANCES QUI, DANS CHAQUE PORT, INFLUENT SUR LES MARÉES.

15. Nous avons supposé, dans le premier Chapitre, que la Terre est un solide de révolution, et nous avons déterminé, dans cette hypothèse, les oscillations de la mer; rapprochons-nous de la nature, en donnant à la Terre une figure quelconque. Dans ce cas, les inégalités de la première espèce seront, en vertu des résistances que la mer éprouve, les mêmes que nous avons déterminées dans le n° 7. Relativement aux inégalités de la seconde et de la troisième espèce, la valeur de y sera formée d'une suite de sinus et de cosinus d'angles proportionnels au temps t, et en nommant it un de ces angles, on aura

$$y = F\cos it + G\sin it,$$

$$gy - V' = F'\cos it + G'\sin it,$$

$$u = H\cos it + K\sin it,$$

$$v = P\cos it + Q\sin it.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (A) et (B) du n° 3, donne
ront les six équations suivantes, en comparant les coefficients des sin
et des cosinus de it,

$$i^2H + 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}.Q = -\frac{\partial F'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2},$$

$$i^2K - 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}.P = -\frac{\partial G'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2},$$

$$(1-\mu^2)\,i^2 P - 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}\,.\,K = \frac{\partial F'}{\partial \varpi},$$

$$(1-\mu^2)\,i^2 Q + 2ni\mu\sqrt{1-\mu^2}\,.\,H = \frac{\partial G'}{\partial \varpi},$$

$$F = \frac{\partial.\gamma H\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \frac{\partial.\gamma P}{\partial\varpi},$$

$$G = \frac{\partial.\gamma K\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \frac{\partial.\gamma Q}{\partial\varpi}.$$

Il est facile d'en conclure

$$H = \frac{-\dfrac{\partial F'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} - \dfrac{\frac{2n}{i}\mu\frac{\partial G'}{\partial\varpi}}{\sqrt{1-\mu^2}}}{i^2-4n^2\mu^2},$$

$$K = \frac{-\dfrac{\partial G'}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2} + \dfrac{\frac{2n}{i}\mu\frac{\partial F'}{\partial\varpi}}{\sqrt{1-\mu^2}}}{i^2-4n^2\mu^2},$$

$$P = \frac{\dfrac{\partial F'}{\partial\varpi} - \dfrac{2n}{i}\mu(1-\mu^2)\dfrac{\partial G'}{\partial\mu}}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)},$$

$$Q = \frac{\dfrac{\partial G'}{\partial\varpi} + \dfrac{2n}{i}\mu(1-\mu^2)\dfrac{\partial F'}{\partial\mu}}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F = &-\frac{\gamma(1-\mu^2)\dfrac{\partial^2 F'}{\partial\mu^2}}{i^2-4n^2\mu^2} - \frac{\gamma\dfrac{\partial^2 F'}{\partial\varpi^2}}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)} - \frac{\partial.\dfrac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}}{\partial\mu}\,\frac{\partial F'}{\partial\mu} \\ &- \frac{\dfrac{\partial\gamma}{\partial\varpi}\,\dfrac{\partial F'}{\partial\varpi}}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)} + \frac{\frac{2n}{i}\mu\dfrac{\partial\gamma}{\partial\varpi}}{i^2-4n^2\mu^2}\,\frac{\partial G'}{\partial\mu} - \frac{2n}{i}\,\frac{\partial.\dfrac{\gamma\mu}{i^2-4n^2\mu^2}}{\partial\mu}\,\frac{\partial G'}{\partial\varpi}. \end{aligned}$$

En changeant dans cette équation F en G, F′ en G′ et réciproquement, et en changeant le signe des termes multipliés par $\frac{2n}{i}$, on aura une nouvelle équation entre G, G′, F′, qui, combinée avec celle-ci, déterminera F et G.

On peut, au moyen de ces équations, déterminer généralement la loi de la profondeur de la mer qui rend les oscillations de la seconde espèce nulles pour tous les lieux de la Terre. En effet, relativement à ces oscillations, i étant très-peu différent de n, on peut supposer $i=n$ dans les équations précédentes. De plus, F et G étant nuls par la supposition, les valeurs de F′ et de G′ sont, par le n° 7, $M\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ et $-M\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, M étant une fonction de t indépendante de μ et de ϖ. En substituant ces valeurs dans l'équation précédente entre F, F′ et G′, on trouvera

$$o=\cos\varpi\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2}+\frac{\mu\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi}\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

L'équation entre G, G′ et F′ donnera

$$o=\sin\varpi\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\sqrt{1-\mu^2}-\frac{\mu\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi}\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

d'où l'on tire $\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}=o$, $\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi}=o$, et par conséquent γ égal à une constante. Les oscillations de la seconde espèce ne peuvent donc disparaître pour toute la Terre que dans le seul cas où la profondeur de la mer est constante.

Si les oscillations de la troisième espèce sont nulles pour toute la Terre, F et G sont nuls relativement à ces oscillations, et l'on a, par le n° 9,

$$F'=N(1-\mu^2)\cos 2\varpi,\qquad G'=-N(1-\mu^2)\sin 2\varpi,$$

N étant une fonction de t indépendante de μ et de ϖ. On peut, de plus, supposer à très-peu près $i=2n$; cela posé, l'équation entre F, F′ et G′ donnera

$$o=\frac{2\gamma\cos 2\varpi}{1-\mu^2}+\mu\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\cos 2\varpi+\frac{(1+\mu^2)\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi}\sin 2\varpi}{2(1-\mu^2)};$$

l'équation entre G, G′ et F′ donnera

$$o=\frac{2\gamma\sin 2\varpi}{1-\mu^2}+\mu\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\sin 2\varpi-\frac{(1+\mu^2)\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi}\cos 2\varpi}{2(1-\mu^2)};$$

d'où l'on tire $\frac{\partial\gamma}{\partial\varpi} = 0$ et

$$0 = \frac{2\gamma}{1-\mu^2} + \mu\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}.$$

Cette dernière équation donne, en l'intégrant,

$$\gamma = \frac{A(1-\mu^2)}{\mu^2},$$

A étant une constante arbitraire. Suivant cette valeur de γ, la profondeur de la mer serait infinie lorsque $\mu = 0$, ou à l'équateur, ce qui ne peut pas être admis; il n'y a donc aucune loi admissible de profondeur de la mer qui puisse rendre nulles pour toute la Terre les oscillations de la troisième espèce.

La rapidité du mouvement angulaire de rotation de la Terre, relativement au mouvement angulaire du Soleil et de la Lune, permettant de supposer $i = n$ dans les oscillations de la seconde espèce, et $i = 2n$ dans les oscillations de la troisième espèce, il est facile de conclure de l'analyse précédente et des n°s 6, 8 et 9 que, si l'on marque d'un trait, pour la Lune, les quantités L, v, ψ et r que nous supposerons se rapporter au Soleil, l'élévation αy d'une molécule de la surface de la mer au-dessus de la surface d'équilibre qui aurait lieu sans l'action de ces deux astres est, à fort peu près, de la forme

$$\begin{aligned}\alpha y = & -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]\\ & + A\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-6)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-6)\right]\\ & + B\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right],\end{aligned}$$

A, B, 6 et λ étant des fonctions de μ et de ϖ, dépendantes de la loi de la profondeur de la mer. La généralité de cette forme embrasse un grand nombre de variétés des phénomènes des marées, qui peuvent avoir lieu dans les différents ports. Lorsque la Terre est un solide de révolution, il résulte des n°s 7 et 9 que l'instant du maximum ou du

minimum des oscillations de la seconde et de la troisième espèce est le même que celui du passage de l'astre qui les produit au méridien; mais on voit par la formule précédente que, dans le cas général d'une profondeur quelconque, ces instants peuvent être fort différents, et les heures des marées peuvent être très-variables d'un port à l'autre, conformément à ce que l'on observe.

Dans plusieurs ports, les oscillations de la seconde espèce peuvent être insensibles, tandis que dans d'autres ports on ne remarquera point les oscillations de la troisième espèce. Mais, suivant la formule précédente, les maxima ou minima de ces oscillations suivraient d'un même intervalle les passages de leurs astres respectifs au méridien, puisque les quantités 6 et λ sont les mêmes relativement à chacun des deux astres; or nous verrons dans la suite que ce résultat est contraire aux observations; ainsi, quelque étendue que soit la formule précédente, elle ne satisfait pas encore à tous les phénomènes observés. L'irrégularité de la profondeur de l'océan, la manière dont il est répandu sur la Terre, la position et la pente des rivages, leurs rapports avec les côtes qui les avoisinent, les courants, les résistances que les eaux éprouvent, toutes ces causes, qu'il est impossible de soumettre au calcul, modifient les oscillations de cette grande masse fluide. Nous ne pouvons donc qu'analyser les phénomènes généraux qui doivent résulter des attractions du Soleil et de la Lune, et tirer des observations les données dont la connaissance est indispensable pour compléter dans chaque port la théorie du flux et du reflux de la mer, et qui sont autant d'arbitraires dépendantes de l'étendue de la mer, de sa profondeur et des circonstances locales du port.

16. Envisageons sous ce point de vue général la théorie des oscillations de l'océan et sa correspondance avec les observations. On peut considérer la mer comme un système d'une infinité de molécules qui réagissent les unes sur les autres, soit par leur pression, soit par leur attraction mutuelle, et qui, de plus, sont animées par la pesanteur et par les forces attractives du Soleil et de la Lune. Sans l'action de ces

deux dernières forces, la mer serait depuis longtemps en équilibre; la loi de ces forces doit donc en régler les mouvements.

Pour avoir les forces attractives du Soleil et de la Lune sur une molécule de la surface de la mer, déterminée par les coordonnées R, ϖ et θ, R étant le rayon mené du centre de la Terre à la molécule, nommons $\alpha V'$ la fonction

$$\frac{3LR^2}{2r^3}\left\{[\sin v\cos\theta + \cos v\sin\theta\cos(nt+\varpi-\psi)]^2 - \tfrac{1}{3}\right\}$$
$$+\frac{3L'R^2}{2r'^3}\left\{[\sin v'\cos\theta + \cos v'\sin\theta\cos(nt+\varpi-\psi')]^2 - \tfrac{1}{3}\right\};$$

la somme des forces lunaire et solaire, décomposées suivant le rayon terrestre, sera $\alpha\frac{\partial V'}{\partial R}$, ou $2\alpha V'$, en faisant $R=1$ après la différentiation. La somme de ces forces, décomposées perpendiculairement au rayon terrestre et dans le plan du méridien de la molécule, sera $\alpha\frac{\partial V'}{\partial\theta}$; enfin, la somme des mêmes forces, décomposées perpendiculairement au plan de ce méridien, sera $\frac{\alpha\frac{\partial V'}{\partial\varpi}}{\sin\theta}$. Ces expressions sont très-approchées pour le Soleil, à cause de sa grande distance à la Terre, qui rend insensibles les termes multipliés par $\frac{L}{r^4}$. Elles sont moins exactes pour la Lune; mais les phénomènes des marées ne m'ont rien fait apercevoir qui puisse dépendre des forces de l'ordre $\frac{L'}{r'^4}$; peut-être des observations plus exactes et plus nombreuses que celles qui ont été faites rendront sensibles les effets de ces forces.

Ne considérons d'abord que l'action du Soleil, et supposons qu'il se meuve dans le plan de l'équateur, uniformément et toujours à la même distance du centre de la Terre; les trois forces précédentes deviennent

$$(\mathrm{A})\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{3L}{2r^3}[\sin^2\theta - \tfrac{2}{3} + \sin^2\theta\cos(2nt+2\varpi-2\psi)],\\&\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta[1+\cos(2nt+2\varpi-2\psi)],\\&-\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\sin(2nt+2\varpi-2\psi).\end{aligned}\right.$$

En vertu des seules forces constantes $\frac{3L}{2r^3}(\sin^2\theta - \frac{2}{3})$ et $\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta$, la mer finirait par être en équilibre; ces forces ne font donc qu'altérer un peu la figure permanente qu'elle prend en vertu du mouvement de rotation. Mais les trois parties variables des forces précédentes doivent exciter dans l'océan des oscillations dont nous allons déterminer la nature.

Ces forces redeviennent les mêmes à chaque intervalle d'un demi-jour; or on peut établir, comme un principe général de Dynamique, que *l'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent*; l'état de l'océan doit donc redevenir le même à chaque intervalle d'un demi-jour, en sorte qu'il doit y avoir un flux et un reflux dans cet intervalle.

Pour le faire voir par un raisonnement qui peut s'appliquer à tous les cas semblables, supposons qu'à un instant quelconque a, la hauteur de la mer dans un port ait été h, et qu'elle soit redevenue la même après les intervalles $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots, f^{(i)}, \ldots$, comptés de l'instant a; $a + f^{(i)}$ est l'instant où la hauteur de la mer était h, après le nombre i de ces intervalles; si l'on suppose i très-grand, cet instant ne dépendra point des conditions de mouvement qui ont eu lieu à l'instant a, que nous prendrons pour celui de l'origine du mouvement; car toutes ces conditions ont dû bientôt disparaître par les frottements et les résistances de tout genre que la mer éprouve dans ses oscillations, en sorte que, le mouvement de la mer finissant par n'en plus dépendre et par se rapporter uniquement aux forces qui la sollicitent, il est impossible de connaître l'état primitif de la mer par son état présent.

Imaginons maintenant qu'à l'instant a plus un demi-jour, toutes les conditions du mouvement de la mer aient été les mêmes qu'elles étaient dans le premier cas à l'instant a. Puisque les forces solaires sont les mêmes et varient de la même manière dans les deux cas, il est clair que, dans le second cas, les intervalles successifs après lesquels la hauteur de la mer sera h, en partant de l'instant a plus un demi-jour,

seront, comme dans le premier cas, $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$, en sorte qu'à l'instant $a + f^{(i)} +$ un demi-jour, la hauteur de la mer sera h. Mais puisque, i étant fort grand, l'état actuel de la mer est indépendant de tout ce qui a rapport à l'origine du mouvement, il est visible que l'instant $a + f^{(i)} +$ un demi-jour doit coïncider avec quelques-uns des instants où la hauteur de la mer est h dans le premier cas; on doit donc avoir

$$a + f^{(i)} + \text{un demi-jour} = a + f^{(i+r)},$$

r étant un nombre entier; partant

$$f^{(i+r)} - f^{(i)} = \text{un demi-jour},$$

d'où il suit que l'état de la mer redevient le même après l'intervalle d'un demi-jour.

Il est vraisemblable qu'en supposant la mer entière ébranlée par une cause quelconque, les résistances qu'elle éprouve anéantiraient l'effet de cette cause dans l'intervalle de quelques mois, de manière qu'après cet intervalle les marées reprendraient leur état naturel. On peut juger par là du peu d'influence des vents qui, quelque violents qu'il soient, ne sont que locaux et n'ébranlent que la superficie des mers. Ainsi, en prenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations continuées pendant plusieurs années, ces résultats représenteront à très-peu près l'effet des forces régulières qui agissent sur l'océan.

Imaginons une droite dont les parties représentent le temps, et sur cette droite, comme axe des abscisses, concevons une courbe dont les ordonnées expriment les hauteurs de la mer; la partie de la courbe correspondante à l'abscisse qui représente un demi-jour déterminera la courbe entière qui sera formée de cette partie répétée à l'infini. Ainsi l'intervalle entre deux pleines mers consécutives sera d'un demi-jour, comme l'intervalle entre deux basses mers consécutives.

17. Déterminons cette courbe, et, pour cela, concevons un second Soleil L, parfaitement égal au premier, et mû de la même manière dans le plan de l'équateur, avec la seule différence qu'il précède le

premier dans son orbite de l'angle $n'T$, n' étant égal à $n - m$, et m étant égal à $\frac{d\psi}{dt}$. On aura les forces relatives à ce nouveau Soleil en changeant, dans l'expression des forces variables qui agitent la mer et que nous avons donnée dans le numéro précédent, ψ dans $\psi + n'T$. Ces nouvelles forces, ajoutées aux précédentes, produiront les suivantes

$$\frac{3L}{2r^3}\sin^2\theta[\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)],$$

$$\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta[\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)],$$

$$-\frac{3L}{2r^3}\sin\theta[\sin(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \sin(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)].$$

Si l'on fait $L_{,} = 2L\cos n'T$, ces trois forces se réduisent aux suivantes

$$\frac{3L_{,}}{2r^3}\sin^2\theta\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T),$$

$$\frac{3L_{,}}{2r^3}\sin\theta\cos\theta\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T),$$

$$-\frac{3L_{,}}{2r^3}\sin\theta\sin(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T).$$

Ces dernières forces produisent un flux et un reflux semblable à celui qu'exciterait l'astre L, si sa masse se changeait en $L_{,}$, et si l'on diminuait de $\frac{1}{2}T$ le temps t dans les forces du numéro précédent; en nommant donc y'' l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer correspondante à l'abscisse $t - \frac{1}{2}T$, on aura $\frac{L_{,}y''}{L}$ pour la hauteur de la mer produite par les trois forces précédentes.

Cette hauteur est, par la nature des oscillations très-petites, la somme des hauteurs de la mer dues aux actions des deux Soleils L; car on sait que le mouvement total d'un système agité par de très-petites forces est la somme des mouvements partiels que chaque force lui eût imprimés séparément : c'est ainsi que des ondes légères excitées dans un bassin se superposent les unes aux autres, comme elles se

seraient disposées séparément sur la surface de l'eau tranquille. Cela résulte évidemment de ce que les oscillations très-petites sont données par des équations différentielles linéaires, dont les intégrales complètes sont les sommes de toutes les intégrales partielles qui y satisfont. Soient donc y l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer correspondante au temps t, et y' l'ordonnée correspondante au temps $t-\mathrm{T}$; $y+y'$ sera la somme de ces hauteurs; on aura par conséquent

$$(o) \qquad y+y'=\frac{\mathrm{L}_{,}y''}{\mathrm{L}}.$$

Maintenant, si l'on développe y' et y'' en séries ordonnées par rapport aux puissances de T, on aura, en négligeant les puissances supérieures au carré,

$$y'=y-\mathrm{T}\frac{dy}{dt}+\frac{\mathrm{T}^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$y''=y-\tfrac{1}{2}\mathrm{T}\frac{dy}{dt}+\frac{\mathrm{T}^2}{8}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

On a, de plus,

$$\mathrm{L}_{,}=2\mathrm{L}-\mathrm{L}n'^2\mathrm{T}^2;$$

ces valeurs, substituées dans l'équation (o), donnent

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-4n'^2y;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$y=\frac{\mathrm{BL}}{r^3}\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2\lambda),$$

B et λ étant deux arbitraires, dont la première dépend de la grandeur de la marée totale dans le port, et dont la seconde dépend de l'heure de la marée ou du temps dont elle suit le passage du Soleil au méridien.

Cette expression de y donne la loi suivant laquelle la mer s'élève et s'abaisse. Concevons un cercle vertical dont la circonférence représente un intervalle d'un demi-jour, et dont le diamètre soit égal à la marée totale, c'est-à-dire à la différence des hauteurs de la pleine et de la

basse mer; supposons que les arcs de cette circonférence, en partant du point le plus bas, expriment les temps écoulés depuis la basse mer; les sinus verses de ces arcs seront les hauteurs de la mer qui correspondent à ces temps.

Cette loi s'observe exactement au milieu d'une mer libre de tous côtés; mais dans nos ports les circonstances locales en éloignent un peu les marées; la mer y emploie un peu plus de temps à descendre qu'à monter, et à Brest la différence de ces deux temps est d'environ dix minutes.

Plus une mer est vaste, plus les phénomènes des marées doivent être sensibles. Dans une masse fluide, les impressions que reçoit chaque molécule se communiquent à la masse entière; c'est par là que l'action du Soleil, qui est insensible sur une molécule isolée, produit sur l'océan des effets remarquables, et c'est la raison pour laquelle le flux et le reflux sont insensibles dans les lacs et dans les petites mers, telles que la mer Noire et la mer Caspienne.

On a vu, dans le n° 10, la grande influence de la profondeur de la mer sur la hauteur des marées. Les circonstances locales de chaque port peuvent faire varier considérablement cette hauteur. Les ondulations de la mer, resserrées dans un détroit, peuvent devenir fort grandes; la réflexion des eaux par les côtes opposées peut les augmenter encore : c'est ainsi que les marées, généralement fort petites dans les îles de la mer du Sud, sont très-considérables dans nos ports.

Si l'océan recouvrait un sphéroïde de révolution, et s'il n'éprouvait point de résistance dans ses mouvements, l'instant de la pleine mer serait celui du passage du Soleil au méridien supérieur ou inférieur; mais il n'en est pas ainsi dans la nature, et les circonstances locales font varier considérablement l'heure des marées dans des ports même fort voisins. Pour avoir une juste idée de ces variétés, imaginons un large canal communiquant avec la mer, en s'avançant fort loin dans les terres. Il est visible que les ondulations qui ont lieu à son embouchure se propageront successivement dans toute sa longueur, en sorte que la figure de sa surface sera formée d'une suite de grandes ondes

en mouvement, qui se renouvelleront sans cesse, et qui parcourront leur longueur dans l'intervalle d'un demi-jour. Ces ondes produiront à chaque point du canal un flux et un reflux qui suivront la loi précédente; mais les heures du flux retarderont à mesure que les points seront plus éloignés de l'embouchure. Ce que nous disons d'un canal peut s'appliquer aux fleuves, dont la surface s'élève et s'abaisse par des ondes semblables, malgré le mouvement contraire de leurs eaux. On observe ces ondes dans toutes les rivières, près de leur embouchure; elles se propagent fort loin dans les grands fleuves, et, au détroit du Pauxis, dans la rivière des Amazones, à 80 myriamètres de distance à la mer, elles sont encore sensibles.

18. Considérons présentement l'action de la Lune, et supposons que cet astre se meuve uniformément dans le plan de l'équateur. Il est clair qu'il doit exciter dans l'océan un flux et un reflux semblable à celui qui résulte de l'action du Soleil; les deux flux partiels produits par les actions de ces astres se combinent sans se troubler mutuellement, et leur combinaison produit le flux composé que nous observons dans nos ports. Cela posé, en marquant d'un trait, pour la Lune, les quantités L, r, ψ, λ, B, relatives à l'action du Soleil, la hauteur de la mer due à l'action de la Lune sera exprimée par la fonction

$$\frac{B'L'}{r'^3}\cos(2nt+2\varpi-2\psi'-2\lambda'),$$

B′ et λ' étant deux nouvelles arbitraires; la hauteur entière y de la mer, due aux actions réunies du Soleil et de la Lune, sera donc

$$y=\frac{BL}{r^3}\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2\lambda)+\frac{B'L'}{r'^3}\cos(2nt+2\varpi-2\psi'-2\lambda').$$

On voit par cette formule que la hauteur des marées doit varier considérablement avec les phases de la Lune. Cette hauteur est la plus grande lorsque les deux cosinus de l'expression de y sont égaux à l'unité, et alors elle est la somme des quantités $\frac{BL}{r^3}$ et $\frac{B'L'}{r'^3}$. Elle est la

plus petite lorsque, le cosinus affecté du plus grand coefficient étant 1, l'autre cosinus est -1, et alors elle est égale à la différence des deux quantités précédentes. Si $\frac{BL}{r^3}$ surpassait $\frac{B'L'}{r'^3}$, le maximum et le minimum de cette hauteur auraient lieu lorsque le premier cosinus serait 1, et par conséquent ils arriveraient à la même heure du jour. Mais si $\frac{B'L'}{r'^3}$ surpassait $\frac{BL}{r^3}$, la plus petite marée aurait lieu lorsque le premier cosinus serait -1, ou à l'instant de la basse mer solaire; l'heure de cette marée serait donc à un quart de jour de distance de l'heure de la plus grande marée. Voilà donc un moyen simple de reconnaître laquelle des deux quantités $\frac{BL}{r^3}$ et $\frac{B'L'}{r'^3}$ est la plus grande. Toutes les observations faites dans nos ports concourent à faire voir que la seconde surpasse la première.

Les constantes arbitraires B, B', λ et λ' donnent lieu à plusieurs remarques importantes. Si l'on avait $\lambda = \lambda'$, la plus grande marée aurait lieu au moment de la pleine ou de la nouvelle Lune, et la plus petite marée arriverait au moment de la quadrature. En effet, au moment de la plus grande marée, les deux angles $2(nt + \varpi - \psi - \lambda)$ et $2(nt + \varpi - \psi' - \lambda')$ sont égaux à zéro ou à un multiple de la circonférence; leur différence est pareillement nulle ou multiple de la circonférence, ce qui, dans le cas de $\lambda = \lambda'$, suppose la Lune en conjonction ou en opposition au Soleil. Suivant les observations faites dans nos ports, la plus grande marée suit d'environ un jour et demi la nouvelle ou la pleine Lune, en sorte que $\psi' - \psi$ est positif et égal au mouvement synodique de la Lune, pendant un jour et demi; $\lambda' - \lambda$ est donc négatif, et par conséquent λ surpasse λ'.

On aura une juste idée de ce phénomène en imaginant, comme ci-dessus, un large canal communiquant avec la mer, et s'avançant fort loin dans les terres, sous le méridien de son embouchure. Si l'on suppose qu'à cette embouchure la pleine mer a lieu à l'instant même du passage de l'astre au méridien, et qu'elle emploie vingt et une heures à parvenir à son extrémité, il est visible qu'à ce dernier point la marée

solaire suivra d'une heure le passage du Soleil au méridien; mais, deux jours lunaires formant $2^{\text{jours}},070$ solaires, le flux lunaire ne suivra que de 30 minutes le passage de la Lune au méridien. Dans ce cas, l'angle λ est une heure convertie en degrés, à raison de la circonférence entière pour un jour, ce qui donne $\lambda = 40°$. L'angle λ' est l'intervalle de 30 minutes, converti de la même manière en degrés, ce qui donne $\lambda' = 12°$. Si l'extrémité du canal est plus orientale que son embouchure d'un certain nombre de degrés, il faudra les ajouter aux valeurs précédentes de λ et de λ' pour avoir leurs véritables valeurs. Dans l'hypothèse que nous considérons, B et B' sont les mêmes, et l'angle $\lambda - \lambda'$ est égal au mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle de vingt et une heures; la différence des valeurs de λ et de λ' ne fait que reculer de vingt et une heures les phénomènes des marées qui ont lieu à l'embouchure, où $\lambda = \lambda'$, et il est clair que ce résultat a également lieu pour un système quelconque d'astres mus uniformément dans le plan de l'équateur.

Imaginons présentement que le canal dont nous venons de parler ait deux embouchures; si l'on suppose $\frac{d\psi}{dt} = m$ (*), la marée qui a lieu à la première embouchure par l'action de L produira à l'extrémité du canal une marée dont la hauteur sera exprimée par

$$\frac{\text{BL}}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2m\text{T}),$$

T étant l'intervalle de temps que la marée emploie à se transmettre de la première embouchure à l'extrémité du canal. Pareillement, la marée qui a lieu à la seconde embouchure produira à l'extrémité du canal une marée dont la hauteur sera représentée par

$$\frac{\text{CL}}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2m\text{T}'),$$

T' étant l'intervalle de temps que cette marée emploie à se transmettre

(*) Correction proposée par Bowditch : « Si l'on pose $\frac{d\psi}{dt} = m'$ et $m = n - m'$, la marée qui a lieu..... »

de la seconde embouchure à l'extrémité du canal, et le coefficient C dépendant de la hauteur de la marée à cette seconde embouchure. La hauteur entière y de la marée, à l'extrémité du canal, produite par l'action de l'astre L, sera donc

$$y = \frac{BL}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2mT) + \frac{CL}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2mT').$$

Si l'on fait

$$B_{,} = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC\cos 2m(T' - T)},$$

$$\sin 2\lambda_{,} = \frac{B\sin 2mT + C\sin 2mT'}{B_{,}},$$

on aura

$$y = \frac{B_{,}L}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda_{,}).$$

On voit par là que $B_{,}$ dépend, ainsi que $\lambda_{,}$, de la valeur de m ou de la rapidité du mouvement de l'astre dans son orbite, et il est clair que, si le canal avait trois ou un plus grand nombre d'embouchures, les valeurs de $B_{,}$ et de $\lambda_{,}$ seraient plus composées. Le rapport des coefficients $\frac{BL}{r^3}$ et $\frac{B'L'}{r'^3}$, donné par les observations des marées, n'est donc point exactement celui des forces $\frac{L}{r^3}$ et $\frac{L'}{r'^3}$; il peut être fort différent dans les différents ports, et ce n'est qu'en ayant égard à la différence des valeurs de B et de B′ que l'on peut déterminer, par les phénomènes des marées, le rapport des forces du Soleil et de la Lune.

Si, dans le cas où le canal que nous venons de considérer n'a que deux embouchures, C est égal à $-B$, c'est-à-dire si la haute mer a lieu à la première embouchure à l'instant où la basse mer a lieu à la seconde embouchure: si, de plus, $T = T'$, ou, ce qui revient au même, si les deux marées emploient le même temps à parvenir à l'extrémité du canal, on aura $B_{,} = 0$, et il n'y aura point de flux et de reflux à cette extrémité, en vertu des oscillations dont la période est d'un demi-jour. Ce cas singulier a été observé à Batsha, port du royaume de Tunquin, et dans quelques autres lieux.

La grande variété des circonstances locales qui, dans chaque port, influent sur les marées doit donc en produire de considérables dans

ces phénomènes, et il n'est probablement aucun cas possible qui n'ait lieu sur la Terre. Mais, puisque les constantes B et λ seraient les mêmes pour le Soleil et la Lune si les mouvements de ces astres étaient égaux, il est naturel de supposer que leurs différences sont proportionnelles aux différences de ces mouvements; nous adopterons donc cette hypothèse, et nous verrons qu'elle satisfait avec une précision remarquable aux observations. Nous ferons ainsi

$$\lambda = \mathrm{O} - m\mathrm{T},$$
$$\mathrm{B} = \mathrm{P}(1 - 2m\mathrm{Q}),$$

O, T, P et Q étant les mêmes pour le Soleil et la Lune. Nous donnerons dans la suite le moyen de déterminer ces constantes dans chaque port par les observations.

19. Voyons maintenant ce qui doit arriver lorsque le Soleil et la Lune, toujours mus dans le plan de l'équateur, sont assujettis à des inégalités dans leurs mouvements et dans leurs distances. Les forces partielles

$$\frac{3\mathrm{L}}{2r^3}(\sin^2\theta - \tfrac{2}{3}), \quad \text{et} \quad \frac{3\mathrm{L}}{2r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

trouvées dans le n° **16**, ne seront plus constantes; mais elles varieront avec une grande lenteur, et la période de leur variation sera d'une année. Si la durée de cette période était infinie, ces forces n'auraient d'autre effet que de changer la figure permanente de la mer, qui parviendrait bientôt à l'état d'équilibre. Mais, quoique cette durée soit finie, on a vu, dans le n° 6, qu'en vertu des résistances que la mer éprouve, on peut la considérer comme étant à chaque instant en équilibre sous l'action de ces forces, et déterminer dans cette hypothèse la hauteur correspondante des marées. On a vu de plus que, quelle que soit la profondeur de la mer, la hauteur des marées due à l'action de ces forces est

$$-\frac{1 + 3\cos 2\theta}{8g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\,\frac{\mathrm{L}}{r^3}.$$

Si, dans les parties des forces solaires (A) du n° 16 qui sont multipliées par le sinus et le cosinus de l'angle $2nt + 2\varpi - 2\psi$, on substitue, au lieu de r et de ψ, leurs valeurs, chacune de ces parties se développera en sinus et cosinus d'angles de la forme $2nt - 2qt + 2\varepsilon$, en sorte que l'on aura

$$\frac{3L}{2r^3}\sin^2\theta\cos 2(nt + \varpi - \psi) = \sin^2\theta \, . \, \Sigma k \cos 2(nt - qt + \varepsilon),$$

$$\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta\cos 2(nt + \varpi - \psi) = \sin\theta\cos\theta \, . \, \Sigma k \cos 2(nt - qt + \varepsilon),$$

$$\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\sin 2(nt + \varpi - \psi) = \sin\theta \, . \, \Sigma k \sin 2(nt - qt + \varepsilon),$$

le signe Σ des intégrales finies servant ici à désigner la somme de tous les termes de la forme $k\cos 2(nt - qt + \varepsilon)$ et $k\sin 2(nt - qt + \varepsilon)$, dans lesquels le premier membre de chacune de ces équations peut se décomposer.

Le plus considérable de ces termes est celui qui dépend de l'angle $2nt - 2mt + 2\varpi$, et qui produit le flux et le reflux de la mer, dans le cas que nous avons examiné ci-dessus, où le Soleil serait mû uniformément dans le plan de l'équateur, en conservant toujours la même distance à la Terre. Les autres termes peuvent être considérés comme le résultat de l'action d'autant d'astres particuliers, mus uniformément dans le plan de l'équateur. C'est de la combinaison des flux et reflux partiels dus à l'action de tous ces astres que se compose le flux et le reflux total dû à l'action du Soleil.

Si l'on nomme l la masse de l'astre fictif dont l'action produit le terme dépendant de l'angle $2nt - 2qt + 2\varepsilon$, et a sa distance au centre de la Terre, on aura

$$\frac{3l}{2a^3} = k, \quad \text{ou} \quad \frac{l}{a^3} = \tfrac{2}{3}k.$$

On a vu dans le numéro précédent que, le Soleil étant supposé mû uniformément dans le plan de l'équateur avec un mouvement angulaire égal à mt, la partie de l'expression de la hauteur de la mer dé-

pendante de l'angle $2nt - 2mt + 2\varpi$ est égale à

$$P(1 - 2mQ)\frac{L}{r^3}\cos 2(nt - mt + \varpi - O + mT),$$

les constantes P, Q, O et T étant les mêmes pour tous les astres, quel que soit leur mouvement propre; la somme de toutes les marées partielles dues aux actions de tous les astres l, l', l'', ... sera donc

$$\Sigma P(1 - 2qQ)\frac{l}{a^3}\cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT),$$

et par conséquent elle sera

$$\frac{2P}{3}\Sigma k\cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT) + \frac{2PQ}{3}\cdot\frac{d}{dt}\Sigma k\sin 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT),$$

la différentielle étant prise en supposant nt constant. Mais on a, par ce qui précède,

$$\Sigma k\cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT) = \frac{3L}{2r^3}\cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda),$$

le temps t étant diminué de T dans les variables nt, ψ et r du second membre de cette équation, et λ étant égal à $O - nT$; la partie de la hauteur de la mer, due à l'action du Soleil et dépendante de l'angle $2nt + 2\varpi - 2\psi$, est donc, avec les conditions précédentes,

$$P\frac{L}{r^3}\cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\sin 2(nt + \varpi - \psi - \lambda)\right].$$

Si l'on transporte à la Lune ce que nous venons de dire du Soleil, on trouvera que la partie de la hauteur de la mer, due à son action et dépendante du mouvement de rotation de la Terre, est

$$P\frac{L'}{r'^3}\cos 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) + PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L'}{r'^3}\sin 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda)\right],$$

le temps t devant être encore diminué de T dans cette expression. La partie indépendante du mouvement de rotation de la Terre sera

$$-\frac{1 + 3\cos 2\theta}{8g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\frac{L'}{r'^3}.$$

En réunissant tous les termes dus à l'action du Soleil et de la Lune, on aura, pour l'expression approchée de la hauteur αy de la mer,

$$\alpha y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left(\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}\right)$$

$$+ P\left[\frac{L}{r^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right]$$

$$+ PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right],$$

le temps t devant être diminué de T dans les termes multipliés par P, et la différentielle étant prise en faisant nt constant.

20. Examinons enfin le cas de la nature, dans lequel le Soleil et la Lune ne se meuvent pas dans le plan de l'équateur. Nous avons donné, dans le n° 16, la manière d'obtenir les forces solaires et lunaires décomposées parallèlement à trois droites perpendiculaires entre elles, et il en résulte :

1° Que ces forces, décomposées parallèlement au rayon terrestre, sont

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{4}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$

$$+6\sin\theta\cos\theta\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'\right]$$

$$+\tfrac{3}{2}\sin^2\theta\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'\right];$$

2° Que ces forces, décomposées perpendiculairement au rayon terrestre, dans le plan du méridien, sont

$$\tfrac{3}{4}\sin 2\theta\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$

$$+3\cos 2\theta\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi')\right]$$

$$+\tfrac{3}{2}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi')\right];$$

3° Que ces forces, décomposées perpendiculairement au plan du méridien, sont

$$-3\cos\theta\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\sin(nt+\varpi-\psi')\right]$$

$$-\tfrac{3}{2}\sin\theta\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\sin 2(nt+\varpi-\psi')\right].$$

Les forces partielles

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{4}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right],$$

$$\tfrac{3}{4}\sin 2\theta\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$

croissant avec une grande lenteur, on peut, comme on l'a vu dans le numéro précédent, supposer que la mer est, à chaque instant, en équilibre, sous l'action de ces forces, et dans ce cas la valeur de αy,

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right],$$

donnée par le n° 6, représente la hauteur de la mer due à l'action de ces forces.

Les forces partielles dépendantes de l'angle $2nt+2\varpi+\ldots$ peuvent être décomposées en différents termes multipliés par les sinus et les cosinus d'angles de la forme $2nt-2qt+2\varepsilon$. On s'assurera, comme dans le numéro précédent, qu'il en résulte dans l'expression de la hauteur de la mer une quantité égale à

$$P\left[\frac{L\cos^2 v}{r^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'\cos^2 v'}{r'^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right]$$

$$+PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L\cos^2 v}{r^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'\cos^2 v'}{r'^3}\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right],$$

le temps t devant être diminué de T dans ces termes, et la différentielle étant prise en faisant nt constant.

Il nous reste à considérer la partie des forces précédentes qui dépend de l'angle $nt + \varpi + \ldots$. Cette partie peut se développer en termes multipliés par des sinus et cosinus d'angles de la forme $nt - qt + \varepsilon$, q étant fort petit relativement à n. Chacun de ces termes produit, dans l'intervalle d'un jour à peu près, un flux et un reflux analogues à ceux que produisent les termes dépendants de l'angle $2nt - 2qt + 2\varepsilon$, avec la seule différence que le flux relatif à l'angle $nt - qt + \varepsilon$ n'a lieu qu'une fois par jour, au lieu que le flux relatif à l'angle $2nt - 2qt + 2\varepsilon$ a lieu deux fois par jour.

On trouvera facilement, par l'analyse des numéros précédents, que la hauteur de la mer, due aux forces dont la période est à peu près d'un jour, peut être représentée par la formule

$$A\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]$$
$$+B\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right],$$

A, B et γ étant trois constantes arbitraires, que l'observation peut seule déterminer dans chaque port; les différentielles étant prises en faisant nt constant, et le temps t devant être diminué d'une constante T', que l'observation peut seule déterminer.

Si l'on réunit maintenant toutes ces hauteurs partielles de la mer, on aura, pour sa hauteur entière αy,

$$(O)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha y = &-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]\\
&+A\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]\\
&+B\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]\\
&+P\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right]\\
&+PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right],
\end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle on doit observer de prendre les différentielles en supposant nt constant, et de diminuer le temps t d'une constante T' dans les termes multipliés par A et B, et d'une constante T dans les termes multipliés par P; ces constantes devant être, ainsi que A, B, γ, P, Q, λ, déterminées dans chaque port par les observations.

CHAPITRE IV.

COMPARAISON DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX OBSERVATIONS.

21. Développons présentement les principaux phénomènes des marées qui résultent de l'expression précédente de y, et comparons-y les observations. Nous distinguerons ces phénomènes en deux classes, l'une relative aux hauteurs des marées, et l'autre relative à leurs intervalles, et nous les considérerons à leur maximum vers les syzygies, et à leur minimum vers les quadratures.

Des hauteurs des marées vers les syzygies.

Les instants de la pleine et de la basse mer sont déterminés par l'équation $\frac{dy}{dt} = 0$; or on peut, en différentiant l'expression précédente de αy, supposer les quantités v, v', r, r', ψ et ψ' constantes, parce que, ces quantités variant avec beaucoup de lenteur, l'effet de leurs variations est insensible sur les hauteurs de la pleine et de la basse mer; car on sait que, vers ces deux points de maximum et de minimum, une petite erreur dans le temps t est insensible sur la valeur de y. On peut négliger pareillement, sans erreur sensible, le terme de l'expression de αy multiplié par B; car, les oscillations dépendantes de l'angle $nt + \varpi$ et dont la période est d'un demi-jour à peu près étant très-petites dans nos ports, il est fort vraisemblable que le coefficient B est insensible; nous verrons même dans la suite que Q est très-peu considérable, en sorte que nous ferons d'abord abstraction du

terme qu'il multiplie. L'équation $\frac{dy}{dt} = 0$ donnera ainsi

$$0 = \frac{A}{2P}\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]$$
$$+\frac{L}{r^3}\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda).$$

La fraction $\frac{A}{2P}$ est très-petite dans nos ports, et l'on verra ci-après qu'à Brest elle est tout au plus $\frac{1}{40}$; on peut donc la négliger sans crainte d'erreur sensible. L'équation précédente donne ainsi

$$\operatorname{tang} 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda) = \frac{\frac{L}{r^3}\cos^2 v\sin 2(\psi-\psi')}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'+\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(\psi-\psi')}.$$

Il faut maintenant substituer dans l'expression de y la valeur de $nt+\varpi-\psi'$ déterminée par cette équation. Soit (A) ce que devient alors la fonction

$$A\left[\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right];$$

on aura

$$\alpha y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]+(A)$$
$$\pm P\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2},$$

le signe + ayant lieu pour la haute mer, et le signe — pour la basse mer.

Supposons que cette expression se rapporte à la pleine mer du matin; on aura l'expression de la hauteur de la pleine mer du soir, en augmentant les quantités variables de ce dont elles croissent dans l'intervalle de ces deux marées; il faut, par conséquent, changer le signe de (A), parce que l'angle $nt+\varpi-\psi-\gamma$ augmente d'environ deux angles droits dans cet intervalle, la petite différence pouvant être

négligée, à raison de la petitesse de (A); 2(A) est donc la différence des deux marées d'un même jour. Nommons présentement y' la demi-somme des hauteurs des marées du matin et du soir; y' sera ce que nous entendrons dans la suite par *hauteur moyenne absolue de la marée d'un jour*. On aura à très-peu près

$$y' = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$
$$+P\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2},$$

toutes les variables de cette expression étant relatives à la basse mer intermédiaire entre les deux marées du matin et du soir, et devant par conséquent se rapporter à un instant qui précède de T cette basse mer. Il est très-vraisemblable que la partie de cette expression qui n'est pas multipliée par P se rapporte à un instant différent; mais cette partie est si petite par rapport à l'autre que l'on peut, sans erreur sensible, les rapporter toutes deux à l'instant qui convient à la plus grande.

Si l'on nomme (A') ce que devient (A) à l'instant de la basse mer intermédiaire entre les deux marées du matin et du soir, la hauteur de cette basse mer sera

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]+(A')$$
$$-P\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2}.$$

En retranchant cette expression de la hauteur moyenne absolue de la marée du jour, on aura ce que nous nommerons *marée totale*, qui n'est ainsi que l'excès de la demi-somme des deux marées d'un jour sur la basse mer intermédiaire. Représentons cet excès par y''; on aura

$$y'' = -(A')+2P\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2}.$$

Enfin, la différence de deux basses mers consécutives sera 2(A').

Vers le maximum des marées ou vers les syzygies, l'angle $\psi' - \psi$ est peu considérable, puisqu'il est nul au maximum; on aura donc à peu près, à l'instant de la pleine mer, $nt + \varpi - \psi' = \lambda$. En substituant cette valeur dans la fonction (A), on aura, dans la supposition où le temps t doit être diminué de T dans cette fonction, comme dans la fonction multipliée par P,

$$(A) = -A\left(\frac{L}{r^3}\sin v\cos v + \frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\right)\cos(\lambda - \gamma).$$

(A) étant très-petit, l'erreur de la supposition précédente doit être insensible. La fonction (A′) devient à très-peu près

$$(A') = A\left(\frac{L}{r^3}\sin v\cos v + \frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\right)\sin(\gamma - \lambda).$$

On peut même, vu la petitesse de ces fonctions, y supposer $\lambda = \gamma$, ce qui rend (A′) nul. Cela posé, si, dans les termes multipliés par P des expressions de y' et de y'', on néglige la quatrième puissance de $\psi' - \psi$, on aura, vers les syzygies,

$$y' = -\frac{1 + 3\cos 2\theta}{8g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1 - 3\sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3}(1 - 3\sin^2 v')\right]$$
$$+ P\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right) - \frac{2P\frac{L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}\left[(\psi' - \psi)^2 + \tfrac{1}{4}q^2\right],$$

$$y'' = 2P\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right) - \frac{4P\frac{L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}\left[(\psi' - \psi)^2 + \tfrac{1}{8}q^2\right],$$

q étant la variation de l'arc $\psi' - \psi$ dans l'intervalle des deux pleines mers consécutives. L'addition des termes qui en dépendent est fondée sur ce que la véritable valeur de $(\psi' - \psi)^2$ de l'expression de y' est la demi-somme des carrés $(\psi' - \psi)^2$ relatifs aux deux pleines mers consécutives, et il est facile de voir que cette demi-somme est égale à

$(\psi'-\psi)^2+\frac{1}{4}q^2$, l'arc $\psi'-\psi$ se rapportant ici à la basse mer intermédiaire. Ainsi, les variables des deux formules précédentes se rapportant à cette basse mer, le carré $(\psi'-\psi)^2$ doit, pour plus d'exactitude, être augmenté de $\frac{1}{4}q^2$ dans l'expression de y', et de $\frac{1}{8}q^2$ dans celle de y''.

22. Développons les expressions de y' et de y'' relatives aux équinoxes et aux solstices, pour déterminer l'influence des déclinaisons des astres sur les marées. Le terme

$$-\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$

de l'expression de y' est très-petit; on peut donc y supposer, sans erreur sensible, que les variables r, v, r', v' se rapportent à l'instant même de la syzygie. Lorsque l'on fait une somme des valeurs de y relatives à deux syzygies consécutives, on peut supposer, dans le terme précédent, r' égal à la moyenne distance de la Lune à la Terre dans les syzygies; car il est visible que, si la Lune est apogée dans une syzygie, elle est à peu près périgée dans la syzygie suivante. r est à peu près égal à la moyenne distance de la Terre au Soleil, dans les syzygies des équinoxes, et, si l'on considère autant de syzygies vers les solstices d'hiver que vers les solstices d'été, on peut supposer encore r égal à cette distance moyenne.

La partie $P\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)$ de l'expression de y' change sensiblement dans l'intervalle de quelques jours, et, comme elle est considérable dans nos ports, il est nécessaire d'avoir égard à sa variation. Pour cela, soient ε' l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'équateur, et Γ' la distance de la Lune au nœud ascendant de son orbite sur l'équateur; on aura $\sin v'=\sin\varepsilon'\sin\Gamma'$, et par conséquent

$$\cos^2 v'=1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varepsilon'+\tfrac{1}{2}\sin^2\varepsilon'\cos 2\Gamma'.$$

Nommons t le temps écoulé depuis le maximum de la marée jusqu'au

moment d'une observation quelconque, t étant négatif relativement aux observations antérieures à ce maximum; on aura, en négligeant les puissances de t supérieures au carré, et en supposant le mouvement de la Lune, dans son orbite, uniforme pendant le temps t, ce que l'on peut admettre sans erreur sensible,

$$\cos^2 v' = \cos^2 v' - t\frac{d\Gamma'}{dt}\sin^2\varepsilon'\sin 2\Gamma' - t^2\left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2\sin^2\varepsilon'\cos 2\Gamma',$$

les valeurs de v' et de Γ' dans le second membre de cette équation se rapportant à la syzygie. Dans les équinoxes et dans les solstices, $\sin 2\Gamma'$ est nul à peu près; en ne considérant ainsi les syzygies que vers ces points, le terme de l'expression de $\cos^2 v'$ multiplié par la première puissance de t disparaît de la somme des valeurs de y', surtout si l'on en considère un assez grand nombre pour que les valeurs positives et négatives de $\sin 2\Gamma'$ se détruisent mutuellement; on aura donc alors

$$\cos^2 v' = \cos^2 v' - t^2\left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2(\sin^2\varepsilon' - 2\sin^2 v').$$

Prenons pour unité de temps l'intervalle des deux marées consécutives du matin ou du soir, vers les syzygies, intervalle d'environ $1^{\text{jour}},0271$. Soit υ le moyen mouvement synodique de la Lune dans cet intervalle; on aura dans les syzygies, en ayant égard à l'argument de la variation, qui vers ces points augmente constamment le mouvement lunaire,

$$\left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2 = 1,165\upsilon^2,$$

et par conséquent

$$\cos^2 v' = \cos^2 v' - 1,165 t^2\upsilon^2(\sin^2\varepsilon' - 2\sin^2 v').$$

La variation de $\frac{1}{r'^3}$ peut être négligée, lorsque l'on considère à la fois deux syzygies consécutives. On peut négliger pareillement les variations de $\frac{1}{r^3}$ et de $\sin^2 v$, comme étant peu sensibles dans l'intervalle d'un petit nombre de jours; elles se rapportent d'ailleurs à l'action

du Soleil, que nous verrons ci-après être trois fois moindre que celle de la Lune.

Il nous reste à considérer le terme

$$-\frac{2P\frac{L}{r^3}\cos^2 v\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}(\psi'-\psi)^2$$

de l'expression de y'. Si l'on nomme ε et Γ pour le Soleil ce que nous avons nommé ε' et Γ' pour la Lune, on aura à fort peu près, en observant que ε' diffère très-peu de ε, et que $\sin(\Gamma'+\Gamma)$ est à peu près nul dans les syzygies des équinoxes et des solstices,

$$\cos v\cos v'.(\psi'-\psi)=\cos\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\cdot(\Gamma'-\Gamma),$$

ce qui change le terme précédent dans celui-ci

$$-\frac{2P\frac{L}{r^3}\frac{L'}{r'^3}\cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\cdot t^2 v^2}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}.$$

Cela posé, si l'on nomme Y' la somme des valeurs de y' correspondantes à $2i$ syzygies des équinoxes, on aura

$$\begin{aligned}Y'=&-\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 V)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 V')\right]+2iP\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 V+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'\right)\\&-2iP\frac{L'}{r'^3}\left(t^2+\tfrac{1}{16}\right)v^2\left[1,165.(\sin^2\varepsilon'-2\sin^2 V')+\frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}}{\frac{L}{r^3}\cos^2 V+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'}\right].\end{aligned}$$

Dans cette expression, $\cos^2 V$, $\sin^2 V$, $\cos^2 V'$, $\sin^2 V'$ et $\cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}$ sont les valeurs moyennes entre toutes les valeurs correspondantes de $\cos^2 v$, $\sin^2 v$, $\cos^2 v'$, $\sin^2 v'$ et $\cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}$ relatives aux $2i$ syzygies. La même expression peut représenter encore la somme des valeurs de y' dans $2i$ syzygies des solstices, dont la moitié se rapporte aux solstices d'hiver.

Considérons présentement l'expression de y''. Le terme

$$A\left(\frac{L}{r^3}\sin v\cos v+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\right)$$

est très-petit dans nos ports; il est nul dans les syzygies des équinoxes; il disparaît encore de la somme des valeurs de y'', si l'on considère deux syzygies consécutives, et autant de solstices d'hiver que de solstices d'été. En nommant donc Y'' la somme des valeurs de y'' correspondantes à $2i$ syzygies des équinoxes, on aura

$$Y''=4iP\left(\frac{L}{r^3}\cos^2V+\frac{L'}{r'^3}\cos^2V'\right)-4iP\frac{L'}{r'^3}\left(t^2+\frac{1}{32}\right)\upsilon^2\left[1,165.(\sin^2\varepsilon'-2\sin^2V')+\frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}}{\frac{L}{r^3}\cos^2V+\frac{L'}{r'^3}\cos^2V'}\right];$$

cette expression représente encore la somme des valeurs de y'' dans $2i$ syzygies des solstices.

Voyons maintenant ce que les termes dépendants de Q, et que nous avons jusqu'ici négligés, ajoutent à ces expressions de Y' et de Y''. Pour cela, reprenons l'expression (O) de αy du n° **20**. Dans les équinoxes et dans les solstices, $\frac{d.\cos^2 v}{dt}$ est nul; on peut négliger la différentielle de $\frac{1}{r^3}$ divisée par dt, lorsque l'on considère l'ensemble de deux syzygies consécutives; nous négligerons encore

$$PQ\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{r^3}\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\right],$$

vu la lenteur des variations de v, ψ et r, et parce que $\frac{L}{r^3}$ est trois fois moindre que $\frac{L'}{r'^3}$. Le terme dépendant de Q dans la formule (O) ajoutera ainsi à l'expression de αy la quantité

$$-2PQ\frac{d\psi'}{dt}\,\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda).$$

Or on a

$$\frac{d\psi'}{dt}\cos^2 v'=\frac{d\Gamma'}{dt}\cos\varepsilon'=m'\cos\varepsilon',$$

$m't$ étant le moyen mouvement de la Lune; le terme précédent devient ainsi

$$-2m'PQ\cos\varepsilon'\frac{L'}{r'^3}\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda).$$

De là il est facile de conclure que, dans les syzygies des équinoxes, où $\cos v' = 1$ à fort peu près, le terme dépendant de Q ne fait que changer dans les expressions de αy, Y' et Y'', L' en $L'(1-2m'Q\cos\varepsilon')$, et que dans les solstices, où $\cos v' = \cos\varepsilon'$, L' se change en $L'\left(1-\frac{2m'Q}{\cos\varepsilon'}\right)$, en sorte que la différence des valeurs de L' dans ces deux cas peut servir à déterminer Q.

23. Comparons les formules précédentes aux observations. Au commencement de ce siècle, et sur l'invitation de l'Académie des Sciences, on fit dans nos ports un grand nombre d'observations du flux et du reflux de la mer; elles furent continuées chaque jour à Brest, pendant six années consécutives, et, quoiqu'elles laissent à désirer encore, elles forment, par leur nombre et par la grandeur et la régularité des marées dans ce port, le recueil le plus complet et le plus utile que nous ayons en ce genre. C'est aux observations de ce recueil que nous allons comparer nos formules. Ces observations étant compliquées de beaucoup de circonstances étrangères à l'action du Soleil et de la Lune, il faut en considérer un grand nombre, afin que, les effets des causes passagères venant à se détruire mutuellement, leur ensemble ne présente que l'effet des causes régulières; il faut de plus, par une combinaison avantageuse des observations, faire ressortir les phénomènes que l'on veut connaître. C'est ainsi que, dans la vue de déterminer l'effet de la déclinaison des astres, nous avons considéré à la fois deux syzygies consécutives, dont l'ensemble est indépendant à peu près de la variation de la distance de la Lune à la Terre. Pour comparer sur ce point les observations à la théorie, j'ai pris dans le recueil cité vingt-quatre syzygies vers les équinoxes et vingt-quatre syzygies vers les solstices, en considérant toujours deux syzygies consécutives.

Voici les jours de ces syzygies à Brest :

Syzygies des équinoxes.

Années.	
1711.	28 août, 12 septembre, 26 septembre, 12 octobre.
1712.	1er septembre, 15 septembre.
1714.	25 août, 8 septembre, 23 septembre, 8 octobre.
1715.	18 février, 5 mars, 20 mars, 4 avril, 28 août, 13 septembre, 27 septembre, 12 octobre.
1716.	23 février, 8 mars, 23 mars, 6 avril, 1er septembre, 15 septembre.

Syzygies des solstices.

1711.	16 juin, 30 juin, 25 novembre, 9 décembre.
1712.	19 juin, 3 juillet, 28 novembre, 13 décembre.
1714.	29 mai, 12 juin, 27 juin, 11 juillet, 21 novembre, 7 décembre, 21 décembre.
1715.	5 janvier, 17 juin, 1er juillet, 26 novembre, 10 décembre, 25 décembre.
1716.	9 janvier, 5 juin, 19 juin.

Dans chacune de ces syzygies, j'ai pris une moyenne entre les deux hauteurs absolues des deux marées d'un même jour, c'est-à-dire la hauteur moyenne absolue de la mer; j'ai considéré le jour qui précède la syzygie et que je désigne par -1, le jour de la syzygie que je désigne par 0, et les quatre jours qui la suivent et que je désigne par 1, 2, 3, 4. Plusieurs fois on n'a observé qu'une seule des marées de chaque jour; j'en ai conclu la hauteur moyenne absolue, en lui ajoutant la moitié de son excès sur la marée non observée, excès qu'une première discussion des observations m'a fait connaître à très-peu près, tant dans les syzygies des équinoxes que dans celles des solstices.

Plusieurs fois encore, la hauteur de la basse mer intermédiaire entre les deux marées d'un même jour n'a point été observée. Pour avoir la marée totale, j'ai supposé, conformément à la théorie, que la différence des marées totales, dans deux jours consécutifs, est double à fort peu près de la différence des hauteurs moyennes absolues correspondantes.

J'ai pris un résultat moyen entre les marées totales conclues de cette supposition et des observations des deux jours entre lesquels était compris celui que je considérais.

Quelquefois, la loi des basses mers observées indiquait évidemment une erreur de signe dans une de ces hauteurs. Dans ce cas, j'ai presque toujours regardé comme nulle l'observation de la basse mer, et j'ai conclu la marée totale par la règle que je viens d'exposer. C'est avec ces précautions que j'ai formé le tableau suivant, qui présente la somme des hauteurs moyennes absolues et des marées totales, correspondantes à chacun des jours que j'ai considérés dans les syzygies précédentes :

TABLE I.

Syzygies des équinoxes.

Jours.	Hauteurs moyennes absolues des marées.	Marées totales.
	m	m
−1	129,890	128,988
0	136,079	142,068
1	139,851	149,342
2	139,962	150,066
3	137,479	143,826
4	131,653	131,770

Syzygies des solstices d'été.

Jours.	Hauteurs moyennes absolues des marées.	Marées totales.
−1	62,004	58,097
0	63,914	62,002
1	65,028	64,095
2	65,157	64,995
3	64,147	63,425
4	61,914	59,186

Syzygies des solstices d'hiver.

Jours.	Hauteurs moyennes absolues des marées.	Marées totales.
−1	65,211	61,098
0	66,456	64,967
1	67,121	67,202
2	66,424	67,500
3	65,998	66,187
4	63,574	61,425

24. Considérons d'abord l'ensemble de ces observations. On aura, relativement aux 48 syzygies :

TABLE II.

Jours.	Hauteurs moyennes absolues.	Marées totales.
	m	m
−1	257,105	248,183
0	266,449	269,037
1	272,000	280,639
2	271,543	282,561
3	267,624	273,438
4	257,141	252,381

En considérant les variations des hauteurs absolues et des marées totales de cette Table, on voit que les plus grandes marées n'ont point lieu le jour même de la syzygie, mais du premier au second jour. Déterminons la distance de l'instant du maximum des marées à la syzygie, dans les observations précédentes. Pour cela, prenons pour unité l'intervalle de deux marées du matin ou du soir vers les syzygies, et pour époque l'instant de la basse mer intermédiaire entre les deux marées du jour qui précède la syzygie. Soit, pour un jour quelconque voisin de cette phase, $a+bx-cx^2$ l'expression de la hauteur absolue d'une marée voisine de la syzygie, x étant le nombre des intervalles pris pour unité dont cette marée suit l'époque. Si cette formule se rapporte à une marée du matin, l'expression de la marée du soir du même jour sera $a+b(x+\frac{1}{2})-c(x+\frac{1}{2})^2$, en ne considérant que les inégalités dont la période est à peu près d'un jour, les seules auxquelles il soit nécessaire d'avoir égard ici, parce que les effets des autres inégalités se compensent dans les observations de la Table II. Si l'on ajoute les deux expressions précédentes, la moitié de leur somme sera ce que nous avons nommé *hauteur moyenne absolue de la marée;* l'expression de cette hauteur est ainsi

$$a-\tfrac{1}{16}c+b(x+\tfrac{1}{4})-c(x+\tfrac{1}{4})^2.$$

L'expression de la basse mer intermédiaire est, suivant notre théorie,

de la forme

$$a' - b(x+\tfrac{1}{4}) + c(x+\tfrac{1}{4})^2,$$

$x+\frac{1}{4}$ étant le temps écoulé depuis l'époque jusqu'à cette basse mer; en nommant donc t ce temps, l'expression de la marée totale sera de la forme

$$a'' + 2bt - 2ct^2.$$

Le maximum de cette marée a lieu lorsque $t = \frac{b}{2c}$; cette valeur est pareillement la valeur de x correspondante au maximum de la fonction $a + bx - cx^2$.

Pour déterminer $\frac{b}{2c}$ par les observations, on peut faire usage des marées totales de la Table II; mais les hauteurs moyennes absolues de cette Table ayant été observées avec plus de soin que les marées totales, nous ferons usage de leur ensemble.

Soient donc $f, f', f'', f''', f^{\text{IV}}$ et f^{V} les six sommes que l'on obtient en ajoutant la hauteur absolue à la marée totale de chaque jour, dans la Table II. L'expression analytique de ces sommes sera de la forme $k + ibt - ict^2$, et en y supposant successivement $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$, $t=5$, on aura les valeurs de $f, f', f'', f''', f^{\text{IV}}, f^{\text{V}}$, d'où l'on tirera

$$12ic = f''' + f'' - f^{\text{V}} - f,$$

$$ib = 5ic + \frac{f^{\text{V}} + f^{\text{IV}} + f''' - f'' - f' - f}{9},$$

et par conséquent

$$\frac{b}{2c} = \frac{5}{2} + \frac{2(f^{\text{V}} + f^{\text{IV}} + f''' - f'' - f' - f)}{3(f''' + f'' - f^{\text{V}} - f)}.$$

En substituant pour $f, f', \ldots$ leurs valeurs numériques, on aura

$$\frac{b}{2c} = 2{,}58176.$$

L'intervalle dont le maximum de la marée totale, dans les syzygies de la Table II, a suivi l'instant de la basse mer intermédiaire entre les

deux marées du jour de la syzygie, est donc 1,58176. On verra ci-après que l'intervalle pris pour unité est à fort peu près $1^j,02705$; en le multipliant donc par 1,58176, le produit $1^j,62455$ exprimera l'intervalle dont le maximum de la marée totale a suivi l'instant de la basse mer du matin du jour de la syzygie. Cet instant est l'heure moyenne entre les deux marées de ce jour, et l'on trouve, par un résultat moyen, qu'elle a été dans les observations précédentes $0^j,39657$. On trouve encore, par un résultat moyen, que l'heure de la syzygie dans les mêmes observations a été à Brest $0^j,45667$, en sorte qu'elle a suivi la basse mer de $0^j,06010$; elle a donc précédé le maximum de la marée totale de $1^j,56445$. Mais, comme une erreur de quelques mètres dans ces observations peut influer sensiblement sur cet intervalle, il convient de déterminer d'une manière plus précise cet élément important de la théorie des marées.

Pour cela, j'ai considéré les hauteurs absolues des marées du second jour avant et du cinquième jour après la syzygie; elles sont à peu près à égale distance de part et d'autre du maximum des marées, et à cette distance elles varient de la manière la plus sensible. J'ai ajouté les hauteurs absolues des marées du matin et du soir, du second jour avant chaque syzygie, et, lorsque l'on n'a observé qu'une seule hauteur dans un jour, je l'ai doublée. Le Recueil cité d'observations renferme 100 syzygies, dans lesquelles j'ai pu me procurer des observations semblables. J'ai trouvé $1009^m,470$ pour la somme des hauteurs absolues des marées des seconds jours qui précèdent les syzygies, et $1010^m,886$ pour la somme des hauteurs absolues des marées des cinquièmes jours qui les suivent. Mais, parmi les hauteurs qui précèdent les syzygies, 86 se rapportent au matin, et 114 au soir; en prenant donc pour unité l'intervalle de la basse mer du second jour qui précède la syzygie à la basse mer correspondante du jour suivant, l'heure moyenne à laquelle se rapporte la première somme suit celle de la basse mer du second jour avant la syzygie de $\frac{14}{400}$, ou de 0,035 de cet intervalle. Dans la seconde somme, il y a autant de hauteurs du matin que du soir; l'heure à laquelle elle se rapporte est donc celle de la basse mer du cinquième

jour après la syzygie. Ainsi le milieu de l'intervalle compris entre les instants auxquels ces sommes se rapportent n'est pas exactement le milieu de l'intervalle compris entre l'heure de la basse mer du matin du second jour avant la syzygie et celle de la basse mer correspondante du cinquième jour qui la suit; mais il se rapproche de cette seconde limite de 0,0175.

Si les deux sommes $1009^{m},470$ et $1010^{m},886$ étaient égales, ce milieu serait l'instant du maximum des marées; mais la seconde somme surpassant la première de $1^{m},416$, l'instant de ce maximum est un peu plus près de l'heure de la basse mer du cinquième jour après la syzygie. La hauteur absolue des marées de ce jour et du second jour avant la syzygie varie à Brest de $0^{m},14803$, pendant une moitié de l'intervalle pris pour unité; en supposant donc que l'instant du maximum des marées se rapproche d'un centième de cet intervalle vers la seconde limite, la somme des 200 hauteurs relatives à la seconde limite sera augmentée de $0^{m},59212$, et la somme des 200 hauteurs relatives à la première limite sera diminuée de la même quantité, en sorte que la différence de ces deux sommes sera $1^{m},18424$; et, puisque l'observation donne $1^{m},416$ pour cette différence, le maximum des marées doit être rapproché, par cette considération, de 0,01196 de la seconde limite; en ajoutant 0,0175 à cette quantité, on aura 0,02946 pour le temps dont le maximum des marées se rapproche plus de l'heure de la basse mer du cinquième jour après la syzygie que le milieu de l'intervalle compris entre cette basse mer et celle du second jour avant la syzygie; ce temps évalué en parties du jour est à fort peu près $0^{j},03022$.

Maintenant le milieu de l'intervalle compris entre ces deux basses mers est le même que le milieu compris entre la basse mer du matin du jour de la syzygie et la basse mer correspondante du troisième jour qui la suit; l'intervalle de deux basses mers consécutives du matin étant alors $1^{j},02705$, ce second milieu est éloigné de $1^{j},54058$ de la basse mer du matin du jour de la syzygie. L'heure de cette basse mer peut être supposée $^{j}0,39657$, comme dans les observations de la

Table II, parce que l'heure moyenne à Brest des 100 syzygies que j'ai considérées a été de $0^j,46013$ à peu près, comme dans les observations de cette Table; la syzygie a donc suivi de $0^j,06356$ l'heure de la basse mer du matin, et par conséquent elle a précédé de $1^j,47702$ le milieu de l'intervalle compris entre les deux limites. En y ajoutant $0^j,03022$, on aura $1^j,50724$ pour l'intervalle dont le maximum de la marée à Brest suit la syzygie. C'est la valeur que je supposerai dans la suite à cet intervalle.

25. Déterminons présentement la loi des variations des hauteurs moyennes absolues des marées et des marées totales de la Table II. Pour cela, prenons pour unité l'intervalle des deux marées consécutives du matin ou du soir vers les syzygies, et nommons k la quantité dont l'instant moyen du maximum des marées suit le milieu de l'intervalle compris entre les six jours d'observation que nous avons considérés. Soit $a - bt^2$ l'expression générale des hauteurs moyennes absolues des marées de la Table II, t étant la distance à l'instant du maximum. Les hauteurs moyennes absolues des marées correspondantes aux jours -1, 0, 1, 2, 3, 4 seront

$$a - b(\tfrac{5}{2} + k)^2,\quad a - b(\tfrac{3}{2} + k)^2,\quad a - b(\tfrac{1}{2} + k)^2,$$
$$a - b(\tfrac{1}{2} - k)^2,\quad a - b(\tfrac{3}{2} - k)^2,\quad a - b(\tfrac{5}{2} - k)^2.$$

Si de la somme de la troisième et de la quatrième on retranche la somme des extrêmes, on aura $12b$ pour la différence. Les résultats de la Table II donnent $29^m,297$ pour cette différence, d'où l'on tire

$$b = 2^m,4414.$$

Si l'on représente semblablement par $a' - b't^2$ les marées totales de la Table II, on trouvera de la même manière

$$b' = 5^m,2197.$$

Suivant la théorie exposée dans le n° 22, $b = \frac{1}{2}b'$, et par conséquent $b = 2^m,6098$. La différence entre cette valeur et celle-ci $2^m,4414$, que

donnent les observations des hauteurs moyennes absolues des marées, est dans les limites des erreurs des observations; mais, les hauteurs absolues ayant été observées avec plus de soin que les basses mers, nous prendrons pour b le tiers de la somme des deux valeurs de b et de b' données par les observations, et pour b' le double de ce tiers; nous aurons ainsi

$$b = 2^{m},5537, \quad b' = 5^{m},1074.$$

Pour déterminer a et a', nous observerons que la somme des six expressions précédentes des hauteurs moyennes absolues des marées est $6a - b(\frac{35}{2} + 6k^2)$. Cette somme est, par les observations de la Table II, égale à $1591^{m},862$; on a donc

$$a = \frac{1591^{m},862 + (\frac{35}{2} + 6k^2).2^{m},5537}{6}.$$

On a de la même manière

$$a' = \frac{1606^{m},239 + (\frac{35}{2} + 6k^2).5^{m},1074}{6}.$$

L'heure moyenne de la syzygie de la Table II a été $0^{j},45667$; en lui ajoutant $1^{j},50724$, distance de la syzygie au maximum de la marée, on aura $1^{j},96391$ pour la distance de ce maximum au minuit qui précède la syzygie à Brest. L'instant moyen entre les deux marées du jour de la syzygie a été $0^{j},39657$; en lui ajoutant $\frac{3}{2}$ de l'intervalle pris pour unité, et qui est égal à $1^{j},02705$, on aura $1^{j},93715$ pour la distance du milieu de l'intervalle compris entre les six jours d'observation au minuit qui précède la syzygie. Si l'on retranche cette distance de $1^{j},96391$, on aura la valeur de k exprimée en jours et égale à $0^{j},02676$; en la divisant par $1,02705$, on aura, en parties de l'intervalle pris pour unité, $k = 0,026055$, ce qui donne

$$a = 272^{m},760, \quad a' = 282^{m},606;$$

ainsi l'expression des nombres relatifs aux hauteurs moyennes absolues des marées de la Table II est

$$272^{m},760 - 2^{m},5537.t^2,$$

et l'expression des nombres de la même Table relatifs aux marées totales est

$$282^{m},606 - 5^{m},1074 . t^2,$$

les valeurs de t, relatives à tous ces nombres, étant respectivement

$$-2,526055, \quad -1,526055, \quad -0,526055,$$
$$0,473945, \quad 1,473945, \quad 2,473945.$$

En substituant ces valeurs dans les deux formules précédentes et en comparant les résultats aux nombres de la Table II, on verra que les erreurs sont très-petites et dans les limites de celles dont les observations sont susceptibles.

Comparons maintenant ces formules données par l'observation aux formules du n° 22 données par la théorie de la pesanteur. Soit e la hauteur du zéro de l'échelle d'observation au-dessus du niveau d'équilibre que la mer prendrait sans l'action du Soleil et de la Lune; soit, de plus, h la somme des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil aux instants des phases dans les syzygies de la Table II, et h' cette même somme relativement à la Lune; on aura, par le n° 22,

$$a = 48e - \frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(h-32)+\frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right]+P\left(\frac{hL}{r^3}+\frac{h'L'}{r'^3}\right)-\frac{b}{16}=272^{m},760,$$

$$a' = 2P\left(\frac{hL}{r^3}+\frac{h'L'}{r'^3}\right)-\frac{b}{16}=282^{m},606.$$

On a vu, n° 11, que $\frac{3L}{4r^3g} = 0^{m},12316$. La latitude de Brest étant de 535685″, on a, à très-peu près, $2\theta = 928630''$. En négligeant vis-à-vis de l'unité la fraction $\frac{3}{5\rho}$, très-petite, parce que la moyenne densité ρ de la Terre surpasse plusieurs fois celle de la mer, on aura

$$\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\frac{L}{r^3} = 0^{m},02745.$$

Nous verrons ci-après que, dans les moyennes distances de la Lune

à la Terre, $\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}$; mais la distance de la Lune dans les syzygies est plus petite d'environ $\frac{1}{120}$ que sa moyenne distance, à raison de l'argument de la variation, qui diminue constamment la distance lunaire syzygie; ainsi l'on a dans les syzygies $\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40}\frac{L}{r^3}$. J'ai trouvé que, relativement aux 48 syzygies de la Table II, on a

$$h = 44,13399, \quad h' = 44,50884;$$

on a donc

$$\frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g}\left[\frac{L}{r^3}(h-32) + \frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right] = 4^m,1666,$$

et par conséquent

$$48e - 4^m,1666 + \tfrac{1}{2}.282^m,606 - \tfrac{1}{32}.2^m,5537 = 272^m,760,$$

ce qui donne

$$e = 2^m,827.$$

On a ensuite, en réduisant $\frac{L'}{r'^3}$ à la moyenne distance de la Lune à la Terre,

$$2P.\tfrac{41}{40}h'\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) + 2P(h - \tfrac{41}{40}h')\frac{L}{r^3} = 282^m,756;$$

la fraction $2P(h - \frac{41}{40}h')\frac{L}{r^3}$ étant fort petite, on peut y supposer

$$\frac{L}{r^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right);$$

on aura ainsi

$$2P(\tfrac{123}{160}h' + \tfrac{40}{160}h)\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) = 282^m,756,$$

d'où l'on tire

$$2P\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) = 6^m,2490.$$

C'est l'expression de la marée totale qui aurait lieu à Brest, si le Soleil et la Lune se mouvaient uniformément dans le plan de l'équateur; car on a vu, dans le n° 22, que L' dans les syzygies des équinoxes se

change dans $L'(1-2m'Q\cos\varepsilon')$, et que dans les syzygies des solstices il se change dans $L'\left(1-\frac{2m'Q}{\cos\varepsilon'}\right)$, en sorte que, dans l'ensemble des syzygies de la Table II, L' doit être changé dans $L'\left[1-m'Q\left(\cos\varepsilon'+\frac{1}{\cos\varepsilon'}\right)\right]$; or on a

$$\cos\varepsilon'+\frac{1}{\cos\varepsilon'}=2+4\frac{\sin^4\frac{1}{2}\varepsilon'}{\cos\varepsilon'},$$

et ce dernier terme peut être négligé par rapport au premier, à cause de la petitesse de $\sin^4\frac{1}{2}\varepsilon'$; L' doit donc, relativement aux syzygies de la Table II, être changé en $L'(1-2m'Q)$, comme si la Lune était en mouvement dans le plan même de l'équateur.

Déterminons la variation des marées, près de leur maximum, qui résulte de la théorie de la pesanteur. Pour cela, reprenons l'expression de Y'' du n° 22; l'angle ε' ayant varié sensiblement dans l'intervalle des quarante-huit syzygies de la Table II, il sera déterminé avec une exactitude suffisante pour notre objet, en prenant pour $\cos^2\varepsilon'$ une moyenne entre les carrés des cosinus des déclinaisons de la Lune dans les vingt-quatre syzygies solsticiales de cette Table; soient donc p et p' les sommes des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil et de la Lune dans les vingt-quatre syzygies des équinoxes, et q, q' les mêmes sommes dans les vingt-quatre syzygies des solstices; nous pourrons supposer, à très-peu près,

$$\sin^2\varepsilon'=\frac{24-q'}{24},\qquad \cos^2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}=\frac{q+q'}{2.24}.$$

Le terme multiplié par t^2 dans l'expression de Y'' deviendra ainsi, relativement aux vingt-quatre syzygies équinoxiales,

$$-48P.\tfrac{123}{160}\left(\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}\right)t^2v^2\left(\frac{q+q'}{p+\frac{123}{40}p'}+1,165.\frac{2p'-q'-24}{24}\right),$$

et le même terme relatif aux vingt-quatre syzygies solsticiales sera

$$-48P.\tfrac{123}{160}\left(\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}\right)t^2v^2\left(\frac{q+q'}{q+\frac{123}{40}q'}-1,165.\frac{24-q'}{24}\right),$$

$\frac{L'}{r'^3}$ se rapportant ici à la moyenne distance de la Lune à la Terre. J'ai trouvé

$$p = 23,68196, \quad p' = 23,75355, \quad q = 20,45203, \quad q' = 20,75529.$$

υ est le moyen mouvement synodique de la Lune dans l'intervalle de $1^j,02705$, et ce mouvement est de $141866''$, en ayant égard à l'argument de la variation, qui augmente constamment ce mouvement dans les syzygies. On aura ainsi $-3^m,2040.t^2$ pour la valeur du terme multiplié par t^2 dans l'expression de Y″ relative aux vingt-quatre syzygies équinoxiales, et $-1^m,8977.t^2$ pour la valeur du même terme relatif aux vingt-quatre syzygies solsticiales; ce terme relatif à l'ensemble de toutes les syzygies sera donc $-5^m,1017.t^2$. Les observations nous ont donné, dans le numéro précédent, $-5^m,1074.t^2$ pour ce même terme; ainsi elles s'accordent parfaitement à cet égard avec la théorie.

26. Comparons séparément les observations des syzygies des équinoxes et celles des syzygies des solstices de la Table I. Si l'on détermine par la méthode du numéro précédent les expressions des hauteurs absolues et des marées totales des syzygies des équinoxes données par les observations de cette Table, on trouvera

$$140^m,432 - 1^m,5811.t^2$$

pour l'expression des hauteurs absolues des marées des équinoxes, et

$$150^m,235 - 3^m,1623.t^2$$

pour l'expression des marées totales. On trouvera semblablement

$$132^m,328 - 0^m,9725.t^2$$

pour l'expression des hauteurs absolues des marées des solstices, et

$$132^m,371 - 1^m,9451.t^2$$

pour l'expression des marées totales correspondantes.

On voit d'abord que les marées totales, en partant du maximum, décroissent plus rapidement dans les syzygies des équinoxes que dans celles des solstices. Ce résultat de l'observation est entièrement conforme à la théorie, qui, comme on vient de le voir, donne $-3^{m},2040$ et $-1^{m},8977$ pour les coefficients de t^2, qui diffèrent très-peu des nombres $-3^{m},1623$ et $-1^{m},9451$, donnés par les observations.

Si l'on suppose $t=0$ dans les expressions précédentes, on aura $8^{m},104$ pour l'excès des hauteurs moyennes absolues des marées des équinoxes sur celles des solstices, et $17^{m},864$ pour l'excès des marées totales correspondantes des équinoxes sur celles des solstices. Ce second excès est un peu plus que double du premier. Par le n° **22**, il doit surpasser le double du premier de la quantité

$$\frac{6(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(p-q)+\frac{41}{40}\frac{L'}{r'^3}(p'-q')\right],$$

qui, réduite en nombres, est égale à $2^{m},050$. Les observations donnent $1^{m},656$ pour cette même quantité; la différence est dans les limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

L'excès $17^{m},864$ des marées totales des syzygies des équinoxes sur celles des solstices est l'effet des déclinaisons du Soleil et de la Lune, qui affaiblissent l'action de ces astres sur la mer. Cet excès, par le n° **22**, est égal à

$$2P\left\{\frac{L}{r^3}(p-q)+\frac{41}{40}\frac{L'}{r'^3}\left[p'(1-2m'Q\cos\varepsilon')-q'\left(1-\frac{2m'Q}{\cos\varepsilon'}\right)\right]\right\},$$

ou à

$$2P\left[\frac{L}{r^3}(p-q)+\frac{41}{40}\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)(p'-q')\right]+2P\frac{L'}{r'^3}\cdot\frac{41}{40}\cdot 2m'Q(1-\cos\varepsilon')\left(p'+\frac{q'}{\cos\varepsilon'}\right);$$

or on a, par le numéro précédent,

$$2P\left[\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)\right]=6^{m},2490;$$

de plus, on verra ci-après que $\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)$ est à très-peu près égal à $\frac{3L}{r^3}$; enfin, on peut supposer ici $\cos^2\varepsilon' = \frac{q'}{24}$; la fonction précédente devient ainsi

$$19^m,494 + \frac{2m'Q}{1-2m'Q}\cdot 16^m,953.$$

En l'égalant à l'excès observé $17^m,864$, on pourra déterminer $2m'Q$, et l'on trouvera

$$2m'Q = -0,10637.$$

Il semble donc résulter des observations précédentes que la rapidité du mouvement de la Lune dans son orbite augmente à Brest d'environ $\frac{1}{10}$ l'action de la Lune pour soulever les eaux de la mer, comme elle retarde d'un jour et demi l'instant du maximum des marées; mais cet élément délicat doit être déterminé par un plus grand nombre d'observations.

27. Comparons enfin les marées des syzygies des solstices d'hiver à celles des syzygies des solstices d'été de la Table I, pour avoir l'effet de la variation des distances du Soleil à la Terre sur les marées. Si l'on ajoute ensemble les marées totales des jours 1 et 2, dans les solstices d'hiver de la Table I, on aura $134^m,702$ pour leur somme. La même somme dans les marées syzygies des solstices d'été est $129^m,090$, plus petite que la précédente de $5^m,612$, ce qui prouve l'influence de la plus grande proximité du Soleil en hiver qu'en été sur les marées.

Pour comparer sur ce point la théorie de la pesanteur aux observations, nommons l la somme des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil dans les syzygies des solstices d'été de la Table I; nommons l' la même somme pour la Lune. Considérons ensuite que le Soleil est d'environ $\frac{1}{60}$ plus près de nous en hiver que dans sa moyenne distance, ce qui augmente d'un vingtième la valeur de $\frac{L}{r^3}$, qui, par la raison

contraire, est diminuée d'un vingtième en été. Cela posé, les formules du n° **22** donnent

$$4P\left[\frac{L}{r^3}\left(\frac{21}{20}q - 2l\right) + \frac{41}{40}\frac{L'}{r'^3}(q' - 2l')\right]$$

pour l'excès que les observations ont donné égal à $5^m,612$; or on a

$$\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}, \quad 2P\frac{L}{r^3} = \tfrac{1}{4}.6^m,2490;$$

j'ai trouvé, de plus, $l = 10,16776$, $l' = 10,34131$; la fonction précédente devient ainsi $4^m,257$, ce qui ne diffère que de $1^m,355$ du résultat de l'observation.

28. L'effet de la variation des distances à la Terre est beaucoup plus sensible pour la Lune que pour le Soleil. Afin de comparer sur ce point la théorie aux observations, j'ai ajouté les marées totales du premier et du second jour après celui de la syzygie, dans douze syzygies où le demi-diamètre de la Lune, alors voisine du périgée, surpassait 30 minutes, et dans les douze syzygies voisines et correspondantes où le demi-diamètre de la Lune, alors voisine de son apogée, était au-dessous de 28 minutes; j'ai choisi ces deux jours, parce qu'ils comprennent entre eux l'instant du maximum des marées dont ils sont très-proches. La Table suivante renferme les jours de ces syzygies et les marées totales qui leur correspondent :

TABLE III.

Jours de la syzygie.		Marées totales périgées.	Marées totales apogées.
		m	m
1714.	16 janvier	13,305	»
	30 janvier	»	10,654
	14 avril	13,529	»
	29 avril	»	10,778
	10 août	»	10,453
	25 août	14,126	»
	8 septembre	»	10,614
	23 septembre	14,539	»
	8 octobre	»	10,681
	23 octobre	13,470	»
1715.	5 mars	14,300	»
	20 mars	»	10,985
	4 avril	14,061	»
	18 avril	»	10,372
	12 octobre	14,415	»
	27 octobre	»	10,451
	11 novembre	13,711	»
	26 novembre	»	9,986
1716.	6 mai	»	10,244
	21 mai	13,186	»
	5 juin	»	9,592
	19 juin	13,479	»
	4 juillet	»	9,750
	19 juillet	12,135	»

On voit par cette Table que les marées totales correspondantes aux demi-diamètres de la Lune plus grands que 30 minutes sont constamment plus grandes que celles qui correspondent aux demi-diamètres plus petits que 28 minutes. Si l'on ajoute ensemble les marées totales relatives aux plus grands demi-diamètres, on aura $164^{m},256$ pour

leur somme. Celle des marées totales relatives aux douze plus petits demi-diamètres est $124^m,560$. La différence de ces deux sommes est $39^m,6961$. Voyons ce qu'elle doit être par la théorie.

Si l'on néglige, comme on l'a fait dans l'expression de y'' du n° 21, la quantité (A') qui, dans le cas présent, est insensible soit par elle-même, soit parce que les déclinaisons de la Lune ont été alternativement boréales et australes dans les observations de la Table III, il est visible par cette expression que l'on aura la partie de la différence demandée, relative aux termes dépendants de P : 1° en prenant le demi-diamètre moyen de la Lune, dans les vingt-quatre observations de la Table, demi-diamètre que je trouve égal à 2917 secondes; 2° en multipliant dans chaque observation le carré du cosinus de la déclinaison de la Lune par le cube du rapport de son demi-diamètre à 2917 secondes; 3° en faisant une somme de ces produits relatifs aux douze observations dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune surpasse 30 minutes, somme que je trouve égale à 13,5846, et en en retranchant la somme des mêmes produits relatifs aux douze observations dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune a été au-dessous de 28 minutes, et que je trouve égale à 9,3628; 4° enfin en multipliant la différence 4,2218 de ces deux sommes par $4P\frac{L'}{r'^3}$, r' étant ici la distance moyenne syzygie de la Lune, ce qui donne $4P\frac{L'}{r'^3}.4,2218$ pour la partie de la différence demandée qui dépend de P.

Pour avoir la partie qui dépend de Q, nous observerons que, par le n° 20, cette partie ajoute à l'expression de αy le terme $-2PQ\frac{d\psi'}{dt}\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'$: on a, par le n° 22, $\frac{d\psi'}{dt}\cos^2 v' = \frac{d\Gamma'}{dt}\cos\varepsilon'$, et, si l'on prend pour unité la moyenne distance de la Lune à la Terre, on a à très-peu près $\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{m'}{r'^2}$; le terme précédent devient ainsi $-2m'PQ\frac{L'}{r'^5}\cos\varepsilon'$, $\cos\varepsilon'$ pouvant être supposé égal à $\sqrt{\frac{q'}{24}}$, q' étant la somme des carrés des cosinus des déclinaisons de la Lune dans les vingt-quatre syzygies de la Table II, somme qui, par le numéro précé-

dent, est égale à 20,75529. On aura donc la partie de la différence cherchée, relative à Q : 1° en faisant une somme des cinquièmes puissances du rapport du demi-diamètre de la Lune dans chaque observation périgée à 2917 secondes, et en en retranchant la même somme relative aux observations apogées; 2° en multipliant le reste par $-8m'PQ\frac{L'}{r'^3}\sqrt{\frac{q'}{24}}$. On trouve ainsi $-8m'PQ\frac{L'}{r'^3}\cdot 6{,}9091$, r' se rapportant ici à la moyenne distance syzygie de la Lune.

En ajoutant les deux parties dépendantes de P et de Q, la différence demandée sera

$$4P\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q).4{,}2218-\frac{8m'PQ\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q).2{,}6873}{1-2m'Q};$$

on a, par le n° 25,

$$2P\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)=\tfrac{123}{100}.6^{m},2490;$$

la différence précédente devient ainsi

$$40^{m},562-\frac{2m'Q}{1-2m'Q}\cdot 25^{m},819.$$

En l'égalant à la différence observée $39^{m},6961$, on trouve

$$2m'Q=0{,}03425,$$

valeur insensible et d'un signe contraire à celui de la valeur déterminée dans le numéro précédent, par les phénomènes des marées relatifs aux déclinaisons. On voit, par la grandeur du coefficient de $2m'Q$ dans la différence précédente, que les phénomènes des marées dépendants de la variation de la distance de la Lune à la Terre sont très-propres à la déterminer, et il en résulte que $2m'Q$ est très-petit et même insensible à Brest.

En vertu des inégalités de la seconde espèce, ou dont la période est à peu près d'un jour, les marées du soir surpassent à Brest celles du matin dans les syzygies des solstices d'été; elles en sont surpassées

dans les syzygies des solstices d'hiver. Pour déterminer la quantité de ce phénomène, j'ai ajouté, dans dix-sept syzygies vers les solstices d'été, l'excès des marées du soir sur celles du matin, le premier et le second jour après la syzygie. Le maximum des marées tombant à peu près au milieu de ces deux jours d'observation, la variation journalière de la hauteur des marées dues aux inégalités de la troisième espèce est presque insensible dans le résultat, qui ne doit par conséquent renfermer que l'excès des marées du soir sur celles du matin, dû aux inégalités de la seconde espèce. La somme de ces excès dans les trente-quatre jours d'observation a été de $6^{m},131$.

J'ai ajouté pareillement l'excès des marées du matin sur celles du soir, dans onze syzygies vers les solstices d'hiver. La somme de ces excès, dans les vingt-deux jours d'observation, a été de $4^{m},109$. En prenant un milieu entre ces deux résultats, l'excès d'une marée du soir sur celle du matin dans les syzygies des solstices d'été, ou d'une marée du matin sur celle du soir dans les syzygies des solstices d'hiver, en vertu des inégalités de la seconde espèce, est de $0^{m},183$.

Cet excès est, par le n° 21, égal à

$$2A\left(\frac{L}{r^3}\sin v\cos v + \frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\right)\cos(\lambda-\gamma);$$

cette fonction est donc égale à $0^{m},183$. Il est probable que $\cos(\lambda-\gamma)$ diffère peu de l'unité; une longue suite d'observations des *basses mers du matin et du soir* fera connaître exactement sa valeur.

Des hauteurs des marées vers les quadratures.

29. Pour déterminer ces hauteurs par la théorie, nous reprendrons les expressions complètes de y' et de y'' du n° **21**, et nous observerons que, si l'on change ψ' dans $100° + \psi'$ ou dans $300° + \psi'$, suivant que la Lune est vers son premier ou vers son second quartier, on aura, en réduisant y' et y'' en séries, $\psi' - \psi$ étant supposé peu considérable, comme cela a lieu vers les quadratures, et en négligeant les termes

multipliés par Q,

$$y' = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right]$$
$$+ P\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v\right) + \frac{2P\frac{L}{r^3}\cos^2 v\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}\left[(\psi'-\psi)^2+\tfrac{1}{4}q^2\right],$$

$$y'' = A\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\sin(\lambda-\gamma) \pm A\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(\lambda-\gamma)$$
$$+ 2P\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v\right) + \frac{4P\frac{L}{r^3}\cos^2 v\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}\left[(\psi'-\psi)^2+\tfrac{1}{8}q^2\right],$$

le signe + ayant lieu vers le premier quartier de la Lune, et le signe — vers son second quartier (*).

L'excès de la marée du soir sur celle du matin à Brest, dans les quadratures des équinoxes, est, en vertu des inégalités de la seconde espèce,

$$-2A\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(\lambda-\gamma).$$

Il en résulte, par le numéro précédent, qu'à Brest la marée du soir surpasse celle du matin dans les quadratures des équinoxes du printemps; elle en est surpassée dans les quadratures des équinoxes d'automne.

Si, dans un nombre $2i$ de quadratures vers les équinoxes, on considère les hauteurs absolues et les marées totales des jours voisins de la quadrature, en nommant Y′ la somme des hauteurs moyennes absolues, on trouvera, par l'analyse suivant laquelle Y′ a été déterminé dans le nº 22,

$$Y' = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 V)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 V')\right] + 2iP\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V' - \frac{L}{r^3}\cos^2 V\right)$$
$$+ 2iP\frac{L'}{r'^3}(t^2+\tfrac{1}{16})(\Gamma'-\Gamma\cos V'\cos\varepsilon)^2\left(1{,}0611\sin^2\varepsilon' + \frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2 V}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V' - \frac{L}{r^3}\cos^2 V}\right),$$

(*) Les termes $+\frac{1}{4}q^2$, $+\frac{1}{8}q^2$, ajoutés à $(\psi'-\psi)^2$ dans ces deux formules, manquent dans l'édition originale; cette omission a été signalée par Bowditch.

t étant, depuis le minimum de la hauteur moyenne absolue des marées jusqu'à l'instant que l'on considère, le nombre des intervalles d'une marée à la marée correspondante du jour suivant, vers les quadratures des équinoxes; Γ et Γ' sont les mouvements du Soleil et de la Lune dans cet intervalle, eu égard à l'argument de la variation, qui diminue constamment le mouvement lunaire dans les quadratures; ε et ε' sont les inclinaisons des orbes de ces astres à l'équateur.

La valeur de Y' relative à $2i$ quadratures, dont i sont vers les solstices d'hiver et i vers les solstices d'été, est

$$\begin{aligned}Y' = &-\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 V)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 V')\right]+2iP\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V\right)\\ &+2iP\frac{L'}{r'^3}\left(t^2+\tfrac{1}{16}\right)\left(\Gamma'\cos\varepsilon'-\frac{\Gamma}{\cos\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2 V}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V}-1{,}0611\,\text{tang}^2\varepsilon'\right).\end{aligned}$$

En nommant Y'' les marées totales correspondantes à Y', on aura, dans les $2i$ quadratures des équinoxes,

$$\begin{aligned}Y'' = &\,4iP\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V\right)\\ &+4iP\frac{L'}{r'^3}\left(t^2+\tfrac{1}{32}\right)(\Gamma'-\Gamma\cos V'\cos\varepsilon)^2\left(1{,}0611\sin^2\varepsilon'+\frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2 V}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V}\right),\end{aligned}$$

et dans les $2i$ quadratures des solstices,

$$\begin{aligned}Y'' = &\,4iP\left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V\right)\\ &+4iP\frac{L'}{r'^3}\left(t^2+\tfrac{1}{32}\right)\left(\Gamma'\cos\varepsilon'-\frac{\Gamma}{\cos\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\frac{2L}{r^3}\cos^2 V}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 V'-\frac{L}{r^3}\cos^2 V}-1{,}0611\,\text{tang}^2\varepsilon'\right).\end{aligned}$$

Enfin on verra, comme dans le n° 22, que, pour avoir égard aux termes dépendants de Q, il suffit de changer L' dans $L'\left(1-\frac{2m'Q}{\cos V'}\right)$, dans les

expressions relatives aux équinoxes, et L' dans $L'(1 - 2m'Q\cos\epsilon')$, dans les expressions relatives aux solstices.

30. Pour comparer ces résultats aux observations, j'ai pris dans le Recueil cité les observations relatives à vingt-quatre syzygies vers les équinoxes et à vingt-quatre syzygies vers les solstices, en considérant toujours deux quadratures consécutives. Voici les jours de ces quadratures, à Brest :

Quadratures des équinoxes.

Années.	
1711.	5 septembre, 19 septembre, 4 octobre, 18 octobre.
1712.	15 mars, 29 mars, 24 août, 8 septembre, 22 septembre, 7 octobre.
1714.	18 août, 1er septembre, 17 septembre, 30 septembre.
1715.	12 mars, 28 mars, 22 août, 6 septembre.
1716.	1er mars, 15 mars, 30 mars, 14 avril, 8 septembre, 23 septembre.

Quadratures des solstices.

1711.	23 juin, 7 juillet.
1712.	27 mai, 12 juin, 25 juin, 11 juillet.
1714.	21 mai, 5 juin, 20 juin, 4 juillet, 14 décembre, 28 décembre.
1715.	26 mai, 8 juin, 24 juin, 8 juillet, 18 novembre, 3 décembre, 17 décembre.
1716.	2 janvier, 28 mai, 12 juin, 27 juin, 11 juillet.

J'aurais désiré de considérer autant de quadratures vers les solstices d'hiver que vers les solstices d'été; mais le défaut d'observations ne me l'a pas permis.

Dans chacune de ces quadratures, j'ai pris une moyenne entre les hauteurs absolues de deux marées consécutives, pour former ce que je nomme *hauteur moyenne absolue des marées*. J'ai considéré d'abord les deux marées du jour de la quadrature, ensuite les deux marées suivantes, puis les deux marées qui les suivent, enfin les deux marées qui suivent ces dernières, en sorte que souvent les deux marées dont j'ai considéré l'ensemble n'ont point eu lieu le même jour. La *marée*

totale est l'excès de la hauteur moyenne absolue sur la basse mer intermédiaire. Je désigne par 0, 1, 2, 3 les numéros de ces marées, en commençant par celle du jour de la quadrature. Plusieurs fois la hauteur de la basse mer n'a point été observée; quelquefois même on n'a observé qu'une des deux hauteurs de chaque jour. J'ai fait usage, pour suppléer à ce défaut d'observations, de la même méthode que j'ai employée pour les marées syzygies. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

TABLE IV.

Quadratures des équinoxes.

Nos des marées.	Hauteurs moyennes absolues.	Marées totales.
	m	m
0	99,511	69,835
1	94,282	58,638
2	96,059	62,383
3	105,639	81,342

Quadratures des solstices.

Nos des marées.	Hauteurs moyennes absolues.	Marées totales.
	m	m
0	106,117	82,244
1	102,997	76,289
2	103,220	76,654
3	106,760	84,498

31. Considérons d'abord l'ensemble de ces observations. On aura, relativement aux quarante-huit quadratures, les résultats suivants :

TABLE V.

Nos des marées.	Hauteurs moyennes absolues.	Marées totales.
	m	m
0	205,628	152,079
1	197,279	134,927
2	199,279	139,037
3	212,399	165,840

Prenons pour unité l'intervalle de deux marées du matin ou du soir vers les quadratures, et pour époque l'instant moyen entre les deux

marées du jour de la quadrature à Brest. Soit, pour un jour quelconque voisin de cette phase, $a - bx + cx^2$ l'expression de la hauteur absolue de la marée, x étant le nombre des intervalles pris pour unité dont cette marée suit l'époque. Si cette expression se rapporte à une marée du matin, l'expression de la marée du soir du même jour sera $a - b(x + \frac{1}{2}) + c(x + \frac{1}{2})^2$, en ne considérant que les inégalités dont la période est à peu près d'un demi-jour. En ajoutant ces deux expressions, la moitié de leur somme sera la hauteur moyenne absolue de la mer; l'expression de cette hauteur est ainsi

$$a + \tfrac{1}{16}c - b(x + \tfrac{1}{4}) + c(x + \tfrac{1}{4})^2.$$

L'expression de la basse mer intermédiaire est, suivant la théorie, de la forme

$$a' + b(x + \tfrac{1}{4}) - c(x + \tfrac{1}{4})^2;$$

en faisant donc $x + \frac{1}{4} = t$, l'expression de la marée totale sera de la forme

$$m - 2bt + 2ct^2.$$

Le minimum de cette marée a lieu lorsque $t = \frac{b}{2c}$; cette valeur de t est pareillement la valeur de x correspondante au minimum de la formule $a - bx + cx^2$.

Pour déterminer $\frac{b}{2c}$, on peut faire usage des marées totales de la Table V; mais les hauteurs absolues de la même Table ayant été observées avec plus de soin que les marées totales, nous ferons usage de leur ensemble. Soient donc f, f', f'', f''' les quatre sommes que l'on obtient en ajoutant la hauteur moyenne absolue à la marée totale qui lui correspond dans la Table; l'expression analytique de ces sommes sera de la forme $k - ibt + ict^2$. En supposant successivement $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, on aura les valeurs de f, f', f'', f''', d'où l'on tirera

$$4ic = f - f' - f'' + f''',$$

$$ib = 3ic + \frac{f + f' - f'' - f'''}{4},$$

et par conséquent

$$\frac{b}{2c} = \frac{3}{2} + \frac{f + f' - f'' - f'''}{2(f - f' - f'' + f''')} = 1,2964.$$

On verra ci-après que l'intervalle pris pour unité est $1^j,0521$; ainsi l'intervalle depuis l'époque jusqu'au minimum des marées, évalué en jours, est $1^j,3639$. Dans ces observations, l'heure de l'époque a été à Brest $0^j,6121$, et l'heure moyenne de la quadrature a été $0^j,4683$, en sorte que la quadrature a précédé l'époque de $0^j,1438$. En ajoutant cette quantité à $1^j,3639$, on a $1^j,5077$ pour l'intervalle dont le minimum de la marée suit la quadrature, ce qui diffère très-peu de l'intervalle $1^j,50724$, dont on a vu, dans le n° **24**, que le maximum des marées suit la syzygie : ces deux intervalles sont donc égaux, comme ils doivent l'être par la théorie. Nous les supposerons l'un et l'autre de $1^j,50724$.

Déterminons la loi des variations des hauteurs moyennes absolues et des marées totales dans les quarante-huit quadratures précédentes. Pour cela, prenons pour unité l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers les quadratures, et nommons k la quantité dont l'instant moyen du minimum des marées a précédé le milieu de l'intervalle compris entre les quatre jours d'observations. Soit $a + bt^2$ l'expression générale des hauteurs moyennes absolues de la Table V, t étant la distance à l'instant du minimum de ces hauteurs. Les hauteurs moyennes absolues correspondantes aux nos **0**, **1**, **2**, **3** seront

$$a + b(\tfrac{3}{2} - k)^2, \quad a + b(\tfrac{1}{2} - k)^2, \quad a + b(\tfrac{1}{2} + k)^2, \quad a + b(\tfrac{3}{2} + k)^2.$$

Si de la somme des deux extrêmes on retranche la somme des deux moyennes, on aura $4b$ pour la différence qui, par la Table V, est égale à $21^m,469$, d'où l'on tire $b = 5^m,3672$.

Si l'on représente semblablement par $a' + b't^2$ les marées totales de la Table V, on trouvera de la même manière $b' = 10^m,9887$. Suivant la théorie $b = \frac{1}{2}b' = 5^m,4943$; la différence entre cette valeur de b et la précédente est dans les limites des erreurs des observations.

Si l'on prend pour b le tiers de la somme des deux valeurs de b et de b', et pour b' le double de ce tiers, on aura

$$b = 5^{m},4520, \quad b' = 10^{m},9040.$$

Pour déterminer a et a', nous observerons que la somme des quatre expressions précédentes des hauteurs absolues des marées est $4a + b(5 + 4k^2)$. Cette somme est, par la Table V, égale à $814^{m},585$; on a donc

$$a = \frac{814^{m},585 - (5 + 4k^2).5^{m},4520}{4}.$$

On trouvera de la même manière

$$a' = \frac{591^{m},883 - (5 + 4k^2).10^{m},9040}{4}.$$

Pour déterminer k, nous observerons que l'heure moyenne de la quadrature à Brest, dans les quarante-huit quadratures de la Table V, a été $0^{j},46829$; en lui ajoutant $1^{j},50724$, distance de la quadrature au minimum des marées, on aura $1^{j},97553$ pour la distance de l'instant du minimum des marées au minuit qui précède la quadrature. L'instant moyen à Brest, entre les deux marées du jour de la quadrature, a été, dans les observations de la Table V, $0^{j},61215$; en lui ajoutant $\frac{3}{2}$ de l'intervalle pris pour unité et qui est égal à $1^{j},05207$, on aura $2^{j},19025$ pour la distance du minuit qui précède la quadrature au milieu de l'intervalle compris entre les observations extrêmes de la Table. Si l'on en retranche $1^{j},97553$, la différence $0^{j},21472$ sera la valeur de k exprimée en jours; en la divisant par $1^{j},05207$, on aura $0,204093$ pour cette valeur exprimée en parties de l'intervalle pris pour unité, d'où l'on tire

$$a = 196^{m},604, \quad a' = 133^{m},886;$$

ainsi l'expression des nombres de la Table V, relatifs aux hauteurs absolues des marées, est

$$196^{m},604 + 5^{m},4520.t^2,$$

et l'expression des nombres de la même Table, relatifs aux marées totales, est

$$133^{m},886 + 10^{m},9040 . t^2.$$

Comparons maintenant ces formules, données par l'observation, aux formules du n° 29, données par la théorie de la pesanteur. Soit e la hauteur du zéro de l'échelle d'observation au-dessus du niveau d'équilibre que la mer prendrait sans l'action du Soleil et de la Lune; soit de plus h la somme des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil, aux instants des phases, dans les quadratures de la Table V, et h' cette même somme relativement à la Lune; on aura, par le n° 29,

$$48e - \frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(h-32)+\frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right]+P\left(\frac{h'L'}{r'^3}-\frac{hL}{r^3}\right)+\tfrac{1}{16}b=196^{m},604;$$

on a relativement à Brest, par le n° 25,

$$\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)} \cdot \frac{L}{r^3} = 0^{m},02745;$$

mais, dans les quarante-huit quadratures que nous considérons, la valeur de $\frac{L}{r^3}$ n'est point exactement égale à sa valeur moyenne. La Table V comprend vingt-quatre quadratures des équinoxes, dix-huit quadratures d'été et six quadratures d'hiver; or on a vu, dans le n° 27, que, dans les quadratures des solstices d'été, $\frac{L}{r^3}$ est diminué d'un vingtième, et qu'il est augmenté d'un vingtième dans les quadratures des solstices d'hiver; il faut donc multiplier la valeur moyenne de $\frac{L}{r^3}$ par $\frac{79}{80}$ pour avoir sa valeur moyenne dans les quarante-huit quadratures; de plus, $\frac{L'}{r'^3}$ est moindre d'un quarantième dans les quadratures que dans les moyennes distances, à raison de l'argument de la variation, et, comme il est à très-peu près égal à $\frac{3L}{r^3}$ dans les moyennes distances, il

doit être supposé, dans les quadratures, égal à $\frac{117}{40}\frac{L}{r^3}$. Enfin j'ai trouvé, dans les quadratures précédentes,

$$h = 44,16767, \quad h' = 44,45074;$$

on a, cela posé,

$$\frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left[\frac{L}{r^3}(h-32)+\frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right] = 3^{m},989.$$

L'expression des marées totales de la Table V, comparée aux formules du n° 29, donne

$$2P\left(\frac{h'L'}{r'^3}-\frac{hL}{r^3}\right)+\tfrac{1}{16}b = 133^{m},886.$$

Cette équation a besoin d'une légère correction, qui tient à ce que, dans les quadratures de la Table V, il y a dix-huit quadratures d'été et six quadratures d'hiver; or la basse mer de ces quadratures correspond à la haute mer solaire du soir, qui, en été, surpasse à Brest la haute marée solaire du matin de $0^{m},0457$; il faut donc augmenter $133^{m},886$ de six fois $0^{m},0457$, pour le rendre indépendant des inégalités dont la période est à peu près d'un jour, et alors on a

$$2P\left(\frac{h'L'}{r'^3}-\frac{hL}{r^3}\right) = 133^{m},819,$$

d'où l'on tire

$$e = 2^{m},778.$$

Les observations des syzygies nous ont donné, dans le n° 25,

$$e = 2^{m},827.$$

La petite différence de ces deux valeurs dépend-elle des erreurs des observations, ou de ce que la mer ne s'abaisse pas entièrement à Brest à la hauteur déterminée par la théorie dans les grandes marées, comme je le présume? C'est ce qu'un plus grand nombre d'observations fera connaître.

Reprenons l'équation

$$2P\left(\frac{h'L'}{r'^3} - \frac{hL}{r^3}\right) = 133^m,819.$$

Pour réduire les valeurs de $\frac{L}{r^3}$ et de $\frac{L'}{r'^3}$ aux moyennes distances du Soleil et de la Lune, il faut multiplier la somme des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil, dans les quadratures des solstices de la Table V, par $\frac{39}{40}$, pour avoir égard au nombre plus grand des solstices d'été que des solstices d'hiver; en ajoutant ensuite le produit à la somme des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil dans les quadratures des équinoxes, la somme sera la valeur de h dont on doit faire usage. Je trouve ainsi $h = 43,6557$.

Dans les quadratures, la valeur de $\frac{L'}{r'^3}$ doit être diminuée d'un quarantième, à raison de l'argument de la variation, ce qui revient à diminuer dans le même rapport h', qui se réduit alors à $43,3395$; on a donc

$$2P\left(43,3395 \cdot \frac{L'}{r'^3} - 43,6557 \cdot \frac{L}{r^3}\right) = 133^m,819,$$

r et r' étant les moyennes distances du Soleil et de la Lune à la Terre. On peut donner à cette équation la forme suivante

$$2P.43,3395 \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right) - 2P.0,3162 \cdot \frac{L}{r^3} = 133^m,819.$$

Dans le petit terme $2P.0,3162 \cdot \frac{L}{r^3}$ on peut supposer

$$\frac{L}{r^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right);$$

on aura donc

$$2P.43,1814 \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right) = 133^m,819,$$

d'où l'on tire

$$2P\left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right) = 3^m,0990.$$

Nous avons trouvé, dans le n° **25**,

$$2P\left(\frac{L'}{r'^3}+\frac{L}{r^3}\right)=6^m,2490,$$

ce qui donne

$$\frac{L'}{r'^3}=2,9677\cdot\frac{L}{r^3};$$

ainsi l'on peut supposer, à très-peu près, $\frac{L'}{r'^3}$ triple de $\frac{L}{r^3}$. Mais on doit observer ici que ce rapport n'est pas exactement celui des masses de la Lune et du Soleil, divisées respectivement par les cubes de leurs moyennes distances à la Terre. Il résulte du n° 25 que, L′ et L exprimant ces masses, et $m't$, mt exprimant les moyens mouvements de ces astres autour de la Terre, le rapport trouvé ci-dessus est celui de $\frac{L'(1-2m'Q)}{r'^3}$ à $\frac{L(1-2mQ)}{r^3}$; il ne peut donc être pris pour celui de $\frac{L'}{r'^3}$ à $\frac{L}{r^3}$ que dans le cas où Q est nul ou insensible, et l'on a vu précédemment que cela a lieu à fort peu près dans le port de Brest.

Déterminons la variation des marées près de leur minimum, qui résulte de la théorie. Pour cela, reprenons les valeurs de Y″ du n° **29**. Soient p et p' les sommes des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil et de la Lune dans les quadratures des équinoxes de la Table V; soient q et q' les mêmes sommes dans les quadratures des solstices de la même Table; on pourra supposer, dans ces expressions,

$$\cos^2\varepsilon=\frac{q}{24},\quad \cos^2\varepsilon'=\frac{p'}{24};$$

le terme multiplié par t^2 dans l'expression de Y″ relative aux vingt-quatre quadratures équinoxiales devient ainsi

$$\tfrac{39}{40}\cdot 48P\frac{L'}{r'^3}t^2\left(\Gamma'-\frac{\Gamma}{24}\sqrt{qp'}\right)^2\left(1,0611\cdot\frac{24-p'}{24}+\frac{2p\frac{L}{r^3}}{\frac{39}{40}p'\frac{L'}{r'^3}-p\frac{L}{r^3}}\right).$$

Γ′ et Γ étant les mouvements de la Lune et du Soleil, dans les quadra-

tures, pendant l'intervalle pris pour unité, et qui, dans les quadratures équinoxiales, est égal à $1^j,057496$; on doit observer que, dans les quadratures, Γ' est constamment diminué en vertu de l'inégalité de la variation.

Le terme multiplié par t^2, dans l'expression de Y″ relative aux vingt-quatre quadratures solsticiales de la Table V, devient, en diminuant $\frac{L}{r^3}$ d'un quarantième, parce qu'il y a dix-huit solstices d'été sur six solstices d'hiver,

$$\tfrac{39}{40}.48P\frac{L'}{r'^3}t^2\left(\Gamma'\sqrt{\frac{p'}{24}}-\frac{\Gamma}{\sqrt{\frac{q}{24}}}\right)^2\left(\frac{2q\frac{L}{r^3}}{\frac{q'L'}{r'^3}-\frac{qL}{r^3}}-1,0611\cdot\frac{24-p'}{p'}\right),$$

Γ' et Γ étant les mouvements de la Lune et du Soleil dans ces quadratures, pendant l'intervalle pris pour unité, et qui, relativement aux quadratures des solstices, est égal à $1^j,046644$.

$\frac{L}{r^3}$ et $\frac{L'}{r'^3}$ sont réduits dans ces expressions aux distances moyennes du Soleil et de la Lune à la Terre, dans lesquelles on a

$$\frac{L'}{r'^3}=\frac{3L}{r^3},\quad 2P\frac{L'}{r'^3}=\tfrac{3}{4}.6^m,2490.$$

J'ai trouvé

$$p=23,68841,\quad p'=20,69652,\quad q=20,47926,\quad q'=23,75422;$$

on aura, cela posé, $7^m,819$ pour le terme multiplié par t^2 dans l'expression de Y″ relative aux vingt-quatre quadratures équinoxiales, et $2^m,794$ pour le même terme relatif aux vingt-quatre quadratures solsticiales. La somme de ces deux termes est $10^m,613$, ce qui diffère très-peu du résultat $10^m,9040$ que donnent les observations de la Table V (*).

32. Considérons séparément les marées des quadratures des équinoxes et celles des quadratures des solstices. On trouvera, par la mé-

(*) Bowditch remarque que les nombres $2^m,794$ et $10^m,613$ doivent être augmentés tous deux de $0^m,1$, en sorte qu'il faut lire $2^m,894$ et $10^m,713$.

thode du numéro précédent,

$$94^{m},033 + 3^{m},747.t^2,$$
$$58^{m},370 + 7^{m},495.t^2,$$

pour les expressions des hauteurs absolues et des marées totales des équinoxes de la Table IV; les expressions des mêmes quantités relatives aux marées solsticiales de la même Table sont

$$102^{m},571 + 1^{m},705.t^2,$$
$$75^{m},517 + 3^{m},410.t^2.$$

On voit d'abord que les marées croissent plus rapidement dans les équinoxes que dans les solstices, ce qui est conforme à la théorie. Suivant les observations, le coefficient de t^2 relatif aux marées totales est $7^{m},495$ dans les équinoxes et $3^{m},410$ dans les solstices, et l'on a vu dans le numéro précédent que la théorie donne $7^{m},819$ et $2^{m},794$ (*) pour ces mêmes coefficients; la différence est dans les limites des erreurs des observations et des éléments employés dans le calcul.

Si l'on retranche le premier terme de l'expression des marées totales des équinoxes du premier terme de leur expression dans les quadratures, la différence $17^{m},147$ sera l'effet des déclinaisons des astres. Pour le rendre indépendant des marées dont la période est à peu près d'un jour, il faut, comme on l'a vu dans le numéro précédent, lui ajouter six fois $0^{m},0457$, et alors il devient $17^{m},421$.

Suivant les formules du n° 29, cet effet est égal à

$$\tfrac{39}{40}.2P\left\{\frac{L}{r^3}(p-q)+\frac{L'}{r'^3}\left[(1-2m'Q\cos\varepsilon')q'-\left(1-\frac{2m'Q}{\cos\varepsilon'}\right)p'\right]\right\},$$

ou

$$\tfrac{39}{40}.2P\left[\frac{L}{r^3}(p-q)+\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)(q'-p')\right]$$
$$+\tfrac{39}{40}.2P\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)(1-\cos\varepsilon')\left(q'+\frac{p'}{\cos\varepsilon'}\right)\frac{2m'Q}{1-2m'Q},$$

expression dans laquelle on doit augmenter p de sa trente-neuvième

(*) Voir la note de la page précédente.

partie, et où l'on peut supposer $\cos\varepsilon' = \sqrt{\frac{p'}{24}}$. En observant que

$$\frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q) = \frac{3L}{r^3}, \quad 2P\left[\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}(1-2m'Q)\right] = 6^m,2490,$$

elle devient

$$18^m,861 + \frac{2m'Q}{1-2m'Q} \cdot 15^m,015,$$

et, en l'égalant au résultat de l'observation $17^m,421$, on a

$$2m'Q = -0,1061,$$

résultat conforme à celui que les observations syzygies nous ont donné dans le n° **26**, mais d'un signe contraire au résultat trouvé dans le n° **28** par la comparaison des observations périgées et apogées. Il suit de là que l'on peut négliger les termes dépendants de Q, jusqu'à ce qu'un très-grand nombre d'observations en ait fixé la véritable valeur.

33. On a vu, dans le n° 29, que les marées du soir doivent l'emporter à Brest sur celles du matin dans les quadratures de l'équinoxe du printemps, et que le contraire a lieu dans les marées quadratures de l'équinoxe d'automne. Pour vérifier ce phénomène, j'ai ajouté, dans onze quadratures vers les équinoxes du printemps, l'excès des marées du soir sur celles du matin, le premier et le second jour après la quadrature. La somme de ces excès a été de $3^m,143$. J'ai trouvé pareillement $3^m,385$ pour la somme des excès des marées du matin sur celles du soir, dans treize quadratures vers les équinoxes d'automne. Le milieu entre ces observations donne $0^m,138$ pour l'excès d'une marée du soir sur celle du matin dans les quadratures de l'équinoxe du printemps, ou d'une marée du matin sur celle du soir dans les quadratures de l'équinoxe d'automne.

Nous avons trouvé, dans le n° 28, $0^m,183$ pour l'excès des marées du soir sur celles du matin dans les syzygies des solstices d'été. Cet excès est au précédent, suivant la théorie, dans le rapport de $\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}$ à $\frac{L'}{r'^3}$,

ou de 4 à 3, ce qui est, à fort peu près, le rapport des nombres 0,183 et 0,138.

Enfin, j'ai trouvé que l'influence de la variation de la distance lunaire se manifeste d'une manière aussi sensible par les observations dans les marées quadratures que dans les marées syzygies.

Des heures et des intervalles des marées vers les syzygies.

34. Reprenons l'équation trouvée dans le n° 21,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3}\cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' + \frac{L}{r^3}\cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')},$$

et donnons-lui cette forme

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

L'angle $\psi' - \psi$ étant peu considérable vers les syzygies, nous pouvons négliger sa troisième puissance; nous aurons ainsi

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' . (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' + \frac{L}{r^3}\cos^2 v}.$$

Considérons l'instant moyen entre les deux pleines mers du même jour, instant que nous nommerons *heure de la marée totale;* l'équation précédente aura lieu encore pour cet instant, pourvu que les variables nt, ψ et ψ' s'y rapportent; or $nt + \varpi - \psi$ est l'angle horaire du Soleil, et $\psi' - \psi$ est nul au maximum de la marée totale; en nommant donc T l'heure en temps vrai de ce maximum, l'heure vraie de la marée totale d'un jour quelconque sera

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' . (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' + \frac{L}{r^3}\cos^2 v},$$

le second terme de cette expression étant réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour. Soit υ le mouvement synodique de la Lune dans les syzygies, pendant l'intervalle compris entre deux marées consécutives du matin ou du soir vers les syzygies, intervalle que nous prendrons pour unité; soit t le nombre de ces intervalles, depuis l'instant du maximum dans les syzygies des équinoxes; $\psi' - \psi$ sera égal à très-peu près à $t\upsilon \cos\varepsilon'$, et l'on pourra supposer $\cos^2 v' = \cos^2 v$; l'heure, en temps vrai, de la marée sera donc

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\, t\upsilon \cos\varepsilon'}{\frac{L'}{r'^3} + \frac{L}{r^3}}.$$

Dans les solstices, $(\psi' - \psi)\cos v'$ est à très-peu près égal à $t\upsilon$, et l'on peut supposer encore $\cos^2 v' = \cos^2 v$; l'heure vraie de la marée sera donc

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\, t\upsilon}{\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right)\cos v'},$$

t dans ces formules devant être supposé négatif relativement aux marées antérieures au maximum. Comparons-y les observations.

35. Pour cela, j'ai déterminé les heures des marées totales de la Table I dans les jours 0, 1, 2 et 3, en prenant le milieu entre les heures des deux pleines mers qui se rapportent au même jour, ces heures étant comptées du minuit vrai précédent. J'ai trouvé les résultats suivants :

TABLE VI.

Syzygies des équinoxes.

Jours comptés de la syzygie.	Heure, en temps vrai, de la marée totale à Brest.
0^j	$0^j,39708$
1	0,42222
2	0,44733
3	0,47359

Syzygies des solstices.

0^j	$0^j,39606$
1	0,42592
2	0,45369
3	0,48186

Considérons d'abord l'ensemble de ces observations. En prenant une moyenne entre les heures des marées totales de cette Table, correspondantes au même jour, dans les syzygies des équinoxes et dans celles des solstices, on aura $0^j,39657$, $0^j,42407$, $0^j,45051$, $0^j,477725$ pour les heures vraies des marées totales correspondantes aux jours 0, 1, 2, 3. Soit $a + bt'$ l'expression générale de ces heures, t' étant le nombre des intervalles pris pour unité, comptés de l'instant de la marée totale du jour de la syzygie. En retranchant de l'heure de la quatrième marée celle de la première, la différence sera égale à $3b$, d'où l'on tire $b = 0^j,027052$. Si de la somme des quatre heures précédentes on retranche $6b$, la différence sera $4a$, ce qui donne $a = 0^j,39664$; ainsi l'expression de ces heures est

$$0^j,39664 + 0^j,027052.t'.$$

Pour en conclure la constante T du numéro précédent, nous observerons que, quand la marée s'éloigne de $1^j,027052$ de la syzygi

son heure augmente de $0^j,027052$; or, dans les syzygies de la Table précédente, l'heure de la syzygie à Brest a été, par un milieu, à $0^j,45667$; en supposant donc que cette heure soit $0^j,45667 - x$, l'heure de la marée totale sera $0^j,39664 + 0^j,027052.x$, et cette dernière heure suivra la syzygie de $1,027052.x - 0^j,06003$: maintenant T est l'heure de la marée totale correspondante au maximum, et, par le n° 24, cette marée suit la syzygie de $1^j,50724$; en égalant donc à cette quantité la fonction $1,027052.x - 0^j,06003$, on déterminera x, et l'on trouvera

$$0^j,39664 + 0,027052.x = 0^j,43793.$$

C'est la valeur de T à Brest, et ce serait dans ce port l'heure de la marée totale solaire, si le Soleil agissait seul sur la mer, en supposant cet astre mû uniformément dans le plan de l'équateur. Si l'on en retranche un quart de jour, la différence $0^j,18793$ serait, dans ces suppositions, l'heure de la pleine mer solaire à Brest, comptée du minuit ou du midi vrai.

Déterminons la valeur du coefficient de t' qui résulte de la loi de la pesanteur. On a vu, dans le numéro précédent, que ce coefficient, dans les syzygies des équinoxes, est égal à

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}\, v \cos\varepsilon'}{\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}};$$

l'angle v est, par le n° 25, égal à $141866''$; en le divisant par 4, pour le réduire en parties du jour, il devient $0^j,0354665$. On peut supposer $\cos\varepsilon'$ égal à $\sqrt{\frac{q'}{24}}$, q' étant, par le n° 25, égal à $20,75529$; on a d'ailleurs, dans les syzygies des équinoxes, $\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40}\frac{L}{r^3}$; mais il faut diminuer cette valeur d'un trentième, parce que, dans l'équation $\frac{dy}{dt} = 0$ du n° 21, les expressions de $\frac{L}{r^3}$ et de $\frac{L'}{r'^3}$ sont multipliées respectivement par $n - m$ et $n - m'$, mt et $m't$ étant les mouvements du Soleil

et de la Lune; $m'-m$ est un trentième à peu près de $n-m$; on trouvera ainsi $0^j,024679$ pour le coefficient de t' dans les syzygies des équinoxes, qui résulte de la théorie.

Dans les syzygies des solstices, ce coefficient est, par le numéro précédent, égal à

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}v}{\left(\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}\right)\cos v'}.$$

Nous pouvons supposer $\cos v'=\sqrt{\frac{q'}{24}}$, ce qui donne $0^j,028603$ pour ce coefficient. En l'ajoutant au précédent, et prenant la moitié de la somme, on aura $0^j,026641$ égal au coefficient de t' que donne la théorie, relativement à l'ensemble des syzygies de la Table VI, ce qui diffère peu du résultat $0^j,027052$ donné par les observations.

Pour faire coïncider les deux résultats des observations et de la théorie, il faudrait augmenter un peu le rapport de $\frac{L'}{r'^3}$ à $\frac{L}{r^3}$, ce qui fournit un nouveau moyen de déterminer ce rapport. Mais on déterminera cet élément important avec exactitude, en employant les différences des heures observées des marées, à trois jours et demi à peu près de distance de part et d'autre du maximum des marées. Pour cela, j'ai considéré, dans le Recueil cité d'observations, quatre-vingt-dix-huit syzygies, et j'ai ajouté les heures des pleines mers du matin et du soir du second jour avant la syzygie, ces heures étant comptées du minuit vrai pour les marées du matin, et du midi vrai pour les marées du soir; lorsque l'heure de la marée n'a été observée qu'une fois dans un jour, je l'ai doublée, ce qui m'a donné cent quatre-vingt-seize observations. J'ai ajouté pareillement les heures des pleines mers du matin et du soir du cinquième jour après la syzygie. La somme de ces heures a été $16^j,997222$ relativement au second jour avant la syzygie, et $55^j,386111$ pour le cinquième jour après. Leur différence, divisée par 196, est égale à $0^j,195862$; c'est le retard des marées dans l'intervalle de ces observations.

Reprenons l'équation du numéro précédent

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

Les quatre-vingt-dix-huit syzygies que j'ai considérées ayant été prises indistinctement vers les équinoxes et vers les solstices, on peut supposer $\cos^2 v' = \cos^2 v$, et $\psi' - \psi$ égal au mouvement synodique de la Lune, depuis l'instant de la plus grande marée; or cet instant est tombé, à fort peu près, au milieu de l'intervalle compris entre les observations; on peut donc supposer $2(\psi' - \psi)$ égal au mouvement synodique de la Lune pendant cet intervalle. De plus, l'heure de la plus grande marée est déterminée par l'équation $nt + \varpi - \psi - \lambda = 0$; $2(nt + \varpi - \psi - \lambda)$ est donc le retard de la marée dans l'intervalle compris entre les observations, ce retard étant évalué en parties du quart de cercle, à raison de la circonférence entière pour un jour. En le nommant μ après l'avoir ainsi évalué, on aura

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}}{\frac{L}{r^3}} = \frac{\operatorname{tang}\mu}{\sin 2(\psi' - \psi) - \operatorname{tang}\mu \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

Les observations précédentes donnent $\mu = 783448''$; mais, parmi les observations qui précèdent la syzygie, cent douze se rapportent au soir, et, parmi celles qui suivent la syzygie, cent seulement se rapportent au soir; d'où il est aisé de conclure que l'intervalle moyen des observations a été de $7^j,165249$. En supposant cet intervalle également partagé par l'instant du maximum de la pleine mer, et en ayant égard à l'argument de la variation, on trouve $983284''$ pour le mouvement synodique de la Lune dans cet intervalle; c'est la valeur de $2(\psi' - \psi)$; on aura, cela posé,

$$\frac{L'}{r'^3} = 3,053 \cdot \frac{L}{r^3}.$$

Cette valeur se rapporte à la moyenne distance de la Lune à la Terre, parce que l'inégalité de la variation est nulle, à fort peu près, aux limites de l'intervalle compris entre ces observations; mais il faut, comme on l'a vu, l'augmenter d'un trentième, ce qui donne

$$\frac{L'}{r'^3} = 3,155 \cdot \frac{L}{r^3},$$

valeur très-approchante de 3. Les observations des hauteurs et des intervalles des marées concourent donc à faire voir qu'à Brest l'effet de l'action de la Lune sur les marées est, à très-peu près, triple de celui du Soleil.

36. Considérons séparément les syzygies des équinoxes et celles des solstices de la Table VI. En y appliquant la méthode du numéro précédent, on trouvera

$$0^j,39680 + 0^j,025503 . t'$$

pour l'expression des heures des marées totales dans les syzygies des équinoxes, et

$$0^j,39648 + 0^j,028600 . t'$$

pour cette expression dans les syzygies des solstices.

L'heure moyenne de la syzygie à Brest a été $0^j,51612$ dans les premières syzygies, et $0^j,39722$ dans les dernières, d'où l'on tire T égal à $0^j,43725$ par les observations des syzygies des équinoxes, et T égal à $0^j,43841$ par les observations des syzygies des solstices; la différence de ces valeurs à celle-ci $0^j,43793$, que l'ensemble des observations syzygies nous a donnée dans le numéro précédent, est dans les limites des erreurs des observations.

Il résulte des expressions précédentes que le coefficient de t' ou, ce qui revient au même, le retard de la marée d'un jour à l'autre, vers les syzygies, est plus petit dans les équinoxes que dans les solstices. Ce résultat des observations est conforme à la théorie, qui nous a donné, dans le numéro précédent, $0^j,024679$ et $0^j,028603$ pour ces

coefficients, qui diffèrent peu des coefficients $0^{j},025503$ et $0^{j},028600$, déterminés par les observations.

37. Le retard des marées d'un jour à l'autre varie très-sensiblement avec les distances de la Lune à la Terre. Pour comparer sur ce point la théorie aux observations, j'ai ajouté, dans les marées périgées de la Table III, les heures des pleines mers du matin et du soir du jour même de la syzygie, ces heures étant comptées du minuit vrai pour celles du matin, et du midi vrai pour celles du soir. Leur somme est $3^{j},476389$. J'ai ajouté de la même manière les heures des pleines mers du matin et du soir du troisième jour après la syzygie, et j'ai trouvé $5^{j},719444$ pour leur somme. La différence $2^{j},243055$, divisée par 72, donne $0^{j},031154$ pour le retard des marées d'un jour à l'autre.

Dans les marées apogées de la même Table, la somme des heures des pleines mers du jour de la syzygie est $3^{j},642361$, et la somme des heures des pleines mers du troisième jour après la syzygie est $5^{j},229514$. La différence $1^{j},587153$, divisée par 72, donne $0^{j},022044$ pour le retard des marées d'un jour à l'autre. On voit ainsi que ce retard est moindre dans l'apogée que dans le périgée de la Lune, et, en comparant les résultats précédents aux demi-diamètres de la Lune dans les observations de la Table III, on trouve qu'à une minute de variation dans ce demi-diamètre répondent 258 secondes de variation dans le retard des pleines mers d'un jour à l'autre.

Voyons ce que la théorie donne sur cet objet. Les observations de la Table III ayant été prises indistinctement vers les équinoxes et vers les solstices, on peut y supposer $\psi' - \psi$ égal au mouvement synodique de la Lune dans les syzygies, et $\cos^2 v' = \cos^2 v$. Dans ce cas, le retard des marées d'un jour à l'autre vers les syzygies est, par le n° 34, égal à

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}\upsilon}{\frac{L'}{r'^3}+\frac{L}{r^3}};$$

mais υ est plus considérable dans le périgée que dans l'apogée de

la Lune : on a à fort peu près, dans ces deux points de l'orbite, $r'^2 \upsilon = r_{,}'^2 \upsilon_{,}$, $r_{,}'$ et $\upsilon_{,}$ se rapportant à la moyenne distance syzygie de la Lune; l'expression précédente devient ainsi

$$\frac{\frac{L'}{r_{,}'^3}\left(\frac{r_{,}'}{r'}\right)^5 \upsilon_{,}}{\frac{L'}{r_{,}'^3}\left(\frac{r_{,}'}{r'}\right)^3 + \frac{L}{r^3}}.$$

On a vu précédemment que $\frac{L'}{r_{,}'^3} = \frac{123}{40}\frac{L}{r^3}$; mais cette valeur doit être diminuée ici d'un trentième, ce qui donne $\frac{L'}{r_{,}'^3} = 2{,}9725 \cdot \frac{L}{r^3}$; j'ai trouvé d'ailleurs, dans les syzygies périgées de la Table III, $\frac{r_{,}'}{r'} = 1{,}06057$, et dans les syzygies apogées $\frac{r_{,}'}{r'} = 0{,}93943$; enfin on a, en réduisant $\upsilon_{,}$ en temps, à raison de la circonférence pour un jour, $\upsilon_{,} = 0^{j},0354665$; cela posé, la formule précédente donne $0^{j},031125$ pour le retard journalier des marées syzygies périgées de la Table III, et $0^{j},022272$ pour le retard journalier des marées syzygies apogées, ce qui diffère très-peu des retards observés, $0^{j},031154$ et $0^{j},022044$.

Des heures et des intervalles des marées vers les quadratures.

38. Si, dans l'équation

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3}\cos^2 v + \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \cos 2(\psi' - \psi)},$$

on change ψ' dans $100° + \psi'$ ou dans $300° + \psi'$, suivant que la Lune est vers son premier ou vers son dernier quartier, et si l'on considère d'ailleurs que, $\psi' - \psi$ étant peu considérable vers ces points, on peut négliger sa troisième puissance, on aura

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' . (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v};$$

en nommant donc T l'heure vraie du minimum de la marée totale, l'heure vraie d'une marée voisine de la quadrature sera

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'.(\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v},$$

les angles ψ et ψ' étant comptés de la quadrature.

$\psi' \cos v'$ est le mouvement de la Lune dans son orbite vers les quadratures des équinoxes; soit Γ' ce mouvement pendant l'intervalle de deux marées consécutives du matin ou du soir vers les quadratures, intervalle que nous prendrons ici pour unité; soit t le nombre de ces intervalles depuis le minimum de la marée totale jusqu'à celle que l'on considère; on aura $\psi' \cos v' = \Gamma' t$. En nommant Γ le mouvement du Soleil pendant l'intervalle pris pour unité, on aura $\psi = \Gamma t \cos \varepsilon$; l'heure vraie de la marée totale sera donc, vers les quadratures des équinoxes,

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\left(\frac{\Gamma'}{\cos v'} - \Gamma \cos\varepsilon\right) t}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}.$$

Dans les quadratures des solstices, on a $\psi' = \Gamma' t \cos\varepsilon'$, $\psi = \frac{\Gamma t}{\cos v}$; l'heure de la marée totale est donc alors

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\left(\Gamma' \cos\varepsilon' - \frac{\Gamma}{\cos v}\right) t}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}$$

Comparons ces résultats aux observations.

39. Pour cela, j'ai déterminé les heures des marées totales de la Table IV correspondantes aux nos 0, 1, 2 et 3, en prenant le milieu entre les heures des deux pleines mers qui se rapportent au même

numéro, ces heures étant comptées du minuit vrai précédent. J'ai trouvé les résultats suivants :

TABLE VII.

Quadratures des équinoxes.

Numéros des marées totales.	Heures, en temps vrai, de la marée totale à Brest.
0	$0^j,60566$
1	0,66125
2	0,72411
3	0,77815

Quadratures des solstices.

0	$0^j,61863$
1	0,66311
2	0,70933
3	0,75856

Considérons d'abord l'ensemble de ces observations. En prenant une moyenne entre les heures des marées totales de cette Table, correspondantes au même numéro dans les quadratures des équinoxes et dans celles des solstices, on aura $0^j,61215$, $0^j,66218$, $0^j,71672$, $0^j,76835$ pour les heures vraies des marées totales correspondantes aux n°s 0, 1, 2, 3. En appliquant ici la méthode du n° 35, on trouvera, pour l'expression de ces heures,

$$0^j,61175 + 0^j,052067 . t',$$

t' étant le nombre des intervalles pris pour unité, comptés de l'instant de la marée totale du jour de la quadrature. Pour en conclure la constante T des formules du numéro précédent, nous observerons que, quand la marée s'éloigne de $1^j,052067$ de la quadrature, son heure augmente de $0^j,052067$; or, dans les quadratures de la Table VII, l'heure de la quadrature à Brest a été, par un milieu, à $0^j,46828$; en

supposant donc que cette heure soit $0^j,46828 - x$, l'heure de la marée totale sera $0^j,61175 + 0,052067.x$, et cette dernière heure suivra la quadrature de $1,052067.x + 0^j,14347$. Maintenant T est l'heure de la marée totale correspondante au minimum, et, par le n° **24**, cette heure suit la quadrature de $1^j,50724$; en égalant donc à cette quantité la fonction $1^j,052067.x + 0^j,14347$, on déterminera x, et l'on trouvera

$$0^j,61175 + 0^j,052067.x = 0^j,67924.$$

C'est l'heure du minimum de la marée totale à Brest dans les quadratures. Cette heure doit surpasser d'un quart de jour l'heure du maximum de la marée totale, que nous avons trouvée, dans le n° 35, égale à $0^j,43793$. Cependant la différence de ces heures n'est que de $0^j,24131$, plus petite d'environ $8\frac{1}{2}$ minutes qu'un quart de jour. Cela paraît indiquer une anticipation dans l'heure de la pleine mer à Brest, à mesure qu'elle est plus petite; nous avons déjà observé un effet analogue dans la hauteur du zéro de l'échelle d'observation au-dessus du niveau de la mer, déterminée par les marées syzygies et par les marées quadratures. Ce sont vraisemblablement de légers écarts de la supposition dont nous sommes partis, savoir que les deux flux partiels, solaire et lunaire, se superposent l'un à l'autre comme ils se seraient disposés séparément sur la surface du niveau de la mer, ce qui n'a lieu que dans le cas des ondulations infiniment petites.

Déterminons la valeur du coefficient de t' qui résulte de la loi de la pesanteur. On a vu, dans le numéro précédent, que ce coefficient, dans les quadratures des équinoxes, est égal à

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\left(\frac{\Gamma'}{\cos v'} - \Gamma\cos\varepsilon\right)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}.$$

On peut supposer $\cos^2 v' = \frac{1}{24}p'$ et, par le n° **31**, $p' = 20,69652$. On a pareillement $\cos^2 v = \frac{1}{24}p$ et, par le même numéro, $p = 23,68841$; de plus, $\frac{L'}{r'^3} = \frac{117}{40}\frac{L}{r^3}$ dans les quadratures, et cette valeur doit être dimi-

nuée d'un trentième; Γ' est le moyen mouvement de la Lune vers les quadratures, dans l'intervalle de deux marées d'un jour à l'autre vers les quadratures des équinoxes, intervalle égal à $1^j,0575o$, et ce mouvement doit être diminué à raison de l'argument de la variation; Γ est le moyen mouvement correspondant du Soleil; enfin on peut supposer $\cos^2\varepsilon = \frac{1}{24}q$ et, par le n° 31, $q = 20,47926$. On trouvera, cela posé, $0^j,06425$ pour le coefficient de t' donné par la théorie, dans les quadratures des équinoxes.

Dans les quadratures des solstices, le coefficient de t est égal à

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\left(\Gamma'\cos\varepsilon' - \frac{\Gamma}{\cos v}\right)}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' - \frac{L}{r^3}\cos^2 v}.$$

Ici $\cos^2 v' = \frac{1}{24}q'$, et $q' = 23,75422$; $\cos^2 v = \frac{1}{24}q$, et $q = 20,47926$. Γ et Γ' sont les mouvements du Soleil et de la Lune, dans l'intervalle de deux marées d'un jour à l'autre vers les quadratures des solstices, intervalle de $1^j,046644$, le mouvement de la Lune devant être diminué à raison de l'argument de la variation; de plus, $\frac{L'}{r'^3} = \frac{117}{40}\frac{L}{r^3}$; mais, comme il y a dix-huit quadratures d'été et six quadratures d'hiver dans les observations de la Table VII, la valeur de $\frac{L}{r^3}$ doit être diminuée d'un quarantième; enfin, il faut diminuer d'un trentième $\frac{L'}{r'^3}$; on trouvera, cela posé, $0^j,04528$ pour le coefficient de t donné par la théorie, dans les quadratures des solstices. En réunissant les deux coefficients relatifs aux équinoxes et aux solstices, la moitié $0^j,05476$ de leur somme sera le coefficient de t dans toutes les observations de la Table VII. Ce coefficient est, suivant les observations, $0^j,052067$; la différence est dans les limites des erreurs des observations et des éléments employés dans le calcul.

Considérons séparément les observations des quadratures des équinoxes et celles des quadratures des solstices de la Table VII. En y appliquant la méthode précédente, on trouvera, pour l'heure des marées

totales vers les quadratures des équinoxes,

$$0^j,60605 + 0^j,057493 \,.\, t',$$

et pour l'heure des marées totales vers les quadratures des solstices,

$$0^j,61744 + 0^j,046643 \,.\, t'.$$

L'heure moyenne de la quadrature à Brest a été $0^j,44418$ dans les premières quadratures, et $0^j,49239$ dans les secondes, d'où l'on tire T égal à $0^j,67919$ par les observations des quadratures des équinoxes, et T égal à $0^j,67905$ par les observations des quadratures des solstices. La différence de ces valeurs à celle-ci $0^j,67924$, donnée par l'ensemble des équinoxes et des solstices, est dans les limites des erreurs des observations.

Il résulte des expressions précédentes que les coefficients de t' ou, ce qui revient au même, les retards de la marée d'un jour à l'autre vers les quadratures sont plus grands dans les équinoxes que dans les solstices. Ce résultat des observations est conforme à la théorie qui nous a donné $0^j,06425$ et $0^j,04528$, qui diffèrent peu des coefficients $0^j,057493$ et $0^j,046643$, déterminés par les observations. La différence serait plus petite encore, si l'on avait égard aux troisièmes puissances de $\psi' - \psi$, que nous avons négligées, et qui deviennent sensibles, surtout vers les quadratures des équinoxes.

40. Le retard des marées d'un jour à l'autre, vers les quadratures, augmente dans les marées périgées, et diminue dans les marées apogées; mais ce phénomène, dû à la variation de la distance lunaire, est moindre dans les marées quadratures que dans les marées syzygies. Pour comparer sur ce point la théorie aux observations, j'ai ajouté, dans onze quadratures dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune était au-dessous de 28 minutes, les retards des marées, tant du matin que du soir, du jour même de la quadrature jusqu'aux troisièmes marées correspondantes qui les suivent, et j'ai trouvé $3^j,26667$ pour la somme de ces retards. J'ai ajouté pareillement, dans les onze qua-

dratures correspondantes dans lesquelles le demi-diamètre de la Lune surpassait $29\frac{1}{2}$ minutes, les retards des marées tant du matin que du soir, depuis le jour même de la quadrature jusqu'aux troisièmes marées correspondantes qui les suivent, et j'ai trouvé $3^{j},39306$ pour la somme de ces retards. La somme des demi-diamètres lunaires était de 30222 secondes dans les onze premières quadratures, et de 32728 secondes dans les onze dernières; ainsi 2506 secondes d'accroissement dans la somme de ces demi-diamètres ont produit $0^{j},12639$ d'accroissement dans la somme de ces retards, d'où il résulte qu'une minute d'accroissement dans le demi-diamètre de la Lune produit 84 secondes d'accroissement dans le retard des marées d'un jour à l'autre vers les quadratures, accroissement qui est à très-peu près le tiers de celui qui correspond à la même variation du demi-diamètre lunaire dans les syzygies, et qui, par le n° 37, est de 258 secondes.

Par le numéro cité, le retard des marées d'un jour à l'autre vers les syzygies est

$$\frac{\frac{L'}{r_{,}'^{3}}\left(\frac{r_{,}'}{r'}\right)^{5} v_{,}}{\frac{L'}{r_{,}'^{3}}\left(\frac{r_{,}'}{r'}\right)^{3}+\frac{L}{r^{3}}};$$

en supposant $r' = r_{,}' - \delta r'$, l'accroissement du retard des marées, correspondant à la diminution $-\delta r'$, sera

$$\frac{\delta r'}{r_{,}'} \cdot \frac{R\left(\frac{2L'}{r_{,}'^{3}}+\frac{5L}{r^{3}}\right)}{\frac{L'}{r_{,}'^{3}}+\frac{L}{r^{3}}},$$

R étant le retard moyen des marées d'un jour à l'autre vers les syzygies. On trouvera de la même manière, par le n° 37,

$$\frac{\delta r'}{r_{,}'} \cdot \frac{R'\left(\frac{2L'}{r_{,}'^{3}}-\frac{5L}{r^{3}}\right)}{\frac{L'}{r_{,}'^{3}}-\frac{L}{r^{3}}},$$

pour l'accroissement du retard des marées correspondant à $-\delta r'$

dans les quadratures, R′ étant alors le retard moyen des marées d'un jour à l'autre. Maintenant on peut supposer, sans erreur sensible, $\frac{L'}{r_{\prime}'^3} = \frac{3L}{r^3}$ dans ces expressions, ce qui les réduit à $\frac{11R}{4}\frac{\delta r'}{r_{\prime}'}$ et $\frac{R'}{2}\frac{\delta r'}{r_{\prime}'}$; mais on a, par ce qui précède, R = 2705″, R′ = 5207″; ainsi, le premier retard étant supposé de 258 secondes, le second sera de 90; les observations donnent 84 secondes; la théorie sur ce point est donc d'accord avec elles.

41. Nous pouvons maintenant réduire en nombres l'expression de la hauteur αy de la mer, à un instant quelconque, au-dessus de sa surface d'équilibre, expression que nous avons donnée dans le n° **20**. On a vu précédemment que les termes de cette expression, multipliés par B et par Q, sont insensibles à Brest. On peut d'ailleurs, vu la petitesse de A, supposer sans erreur sensible, dans le terme qu'il multiplie, $\gamma = \lambda$. La constante λ est l'intervalle dont la marée solaire suit, à Brest, le passage du Soleil au méridien, cet intervalle étant réduit en degrés, à raison de 400 degrés pour un jour; or l'ensemble des observations des marées syzygies nous a donné pour cet intervalle $0^j,18793$, et l'ensemble des observations des marées quadratures donne pour le même intervalle $0^j,17924$: le milieu entre ces deux résultats est $0^j,18358$; en le réduisant en degrés, on aura $73^\circ,432$; c'est la valeur que nous assignerons à λ. Cela posé, l'expression de αy sera, pour Brest,

$$\begin{aligned}\alpha y = & -0^m,02745.[i^3(1-3\sin^2 v)+3i'^3(1-3\sin^2 v')] \\ & +0^m,07179.\begin{bmatrix} i^3 \sin v \cos v \cos(\upsilon - 73^\circ,432) \\ +3i'^3 \sin v' \cos v' \cos(\upsilon + \psi - \psi' - 73^\circ,432) \end{bmatrix} \\ & +0^m,78112.\begin{bmatrix} i^3 \cos^2 v \cos 2(\upsilon - 73^\circ,432) \\ +3i'^3 \cos^2 v' \cos 2(\upsilon + \psi - \psi' - 73^\circ,432) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dans cette formule : 1° υ est l'angle horaire du Soleil, c'est-à-dire l'angle qu'il a décrit par son mouvement diurne, depuis son passage au méridien de Brest jusqu'à l'instant pour lequel on calcule; 2° v et v' sont les déclinaisons du Soleil et de la Lune, les déclinaisons boréales

étant supposées positives, et les déclinaisons australes négatives; 3° ψ et ψ' sont les ascensions droites du Soleil et de la Lune; 4° i est le rapport de la moyenne distance du Soleil à sa distance actuelle, et i' est la parallaxe actuelle de la Lune, divisée par la constante de cette parallaxe; 5° enfin, les quantités v, v', ψ, ψ', i et i' se rapportent à un instant qui précède de $1^j,50724$ celui que l'on considère.

Les différentes causes qui modifient les oscillations de la mer sur nos côtes, et probablement aussi l'erreur de l'hypothèse des oscillations infiniment petites, dont nous avons fait usage, écartent un peu la formule précédente des observations; ainsi, l'instant de la basse mer, déterminé par cette formule, diffère de quelques minutes de l'instant observé, parce que la mer, à Brest, emploie un peu moins de temps à monter qu'à descendre. On a vu encore que, par les mêmes causes, le niveau de la mer est un peu plus élevé dans les syzygies que dans les quadratures; elles paraissent encore retarder les marées à raison de leur grandeur : malgré ces légers écarts, on pourra employer la formule précédente dans le calcul des marées, que les vents peuvent altérer d'une quantité beaucoup plus sensible.

Cette formule offre un moyen simple de déterminer les plus grandes marées qui doivent suivre chaque syzygie. La connaissance de ces phénomènes intéresse les travaux et les mouvements des ports; elle est encore utile pour prévenir les accidents qui peuvent résulter des inondations produites par les grandes marées; il importe donc qu'ils soient déterminés d'avance; on y parviendra de cette manière. La plus grande marée suit, comme on l'a vu, d'environ un jour et demi l'instant de la pleine ou de la nouvelle Lune, et lorsqu'elle a lieu, les angles $\upsilon - 73°,432$ et $\upsilon + \psi - \psi' - 73°,432$ sont nuls ou égaux à deux angles droits; on a donc alors

$$\begin{aligned}\alpha y = &- 0^m,02745.[i^3(1 - 3\sin^2 v) + 3i'^3(1 - 3\sin^2 v')]\\ &+ 0^m,07179.(\pm i^3 \sin v \cos v \pm 3i'^3 \sin v' \cos v')\\ &+ 0^m,78112.(i^3 \cos^2 v + 3i'^3 \cos^2 v').\end{aligned}$$

On peut, dans cette expression, négliger les deux premiers termes, qui

sont très-petits par rapport au dernier, et qui d'ailleurs n'ont d'influence sensible que vers les solstices, où les marées sont déjà sensiblement affaiblies par les déclinaisons des astres. Alors on a

$$\alpha y = 0^{m},78112.(i^3 \cos^2 v + 3i'^3 \cos^2 v').$$

Dans les syzygies des équinoxes, $i = 1$ à fort peu près; v et v' sont nuls, et la valeur moyenne de i'^3 est $\frac{41}{40}$; en prenant donc pour unité la valeur moyenne de αy vers les syzygies des équinoxes, sa valeur pour une syzygie quelconque sera

$$\alpha y = \tfrac{40}{163}(i^3 \cos^2 v + 3i'^3 \cos^2 v').$$

Ainsi l'on aura, par cette formule très-simple, la hauteur de la plus grande marée qui suit d'un jour ou deux chaque nouvelle ou pleine Lune, les quantités i, i', v et v' se rapportant au moment de la syzygie. Cette formule déterminera encore le plus grand abaissement de la marée au-dessous de la surface d'équilibre; car il résulte de l'expression générale de αy que la mer s'abaisse à peu près autant au-dessous de cette surface dans la basse mer qu'elle s'élève au-dessus dans la haute mer qui lui correspond. Quánt à la marée prise pour unité, on la déterminera par un grand nombre de différences de la haute à la basse mer, observées un jour ou deux après les syzygies voisines de l'équinoxe; la moitié de la valeur moyenne de ces différences sera à très-peu près la marée prise pour unité.

42. Il nous reste, pour compléter cette théorie, à déterminer, par une formule simple et facile à réduire en table, l'heure de la pleine mer. Reprenons l'équation du n° **21**,

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3}\cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' + \frac{L}{r^3}\cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')}.$$

Cette équation renferme les sept variables r, r', v, v', nt, ψ et ψ'; ainsi, sous cette forme, il serait difficile de la réduire en table. Mais on peut la simplifier par la considération du peu de différence qui existe entre

les diamètres apparents du Soleil et de la Lune. Soient H et H′ les demi-diamètres apparents de ces astres dans leurs moyennes distances à la Terre, où nous avons établi $\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}$; soient h et h' leurs demi-diamètres actuels : on aura, en observant que, dans la formule précédente, $\frac{L'}{r'^3}$ doit être diminué d'environ un trentième, ou plus exactement dans le rapport de 2,89841 à 3,

$$\tan 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{2,89841 \cdot \left(\frac{h'}{H'}\right)^3 \cos^2 v' + \left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')}.$$

Pour faire usage de cette équation, on formera d'abord une table des valeurs de la fonction

$$\frac{2,89841 . H' + H}{3,89841}(1 - \sqrt[3]{\cos^2 v}),$$

correspondantes à tous les degrés, depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 32°$. On corrigera les demi-diamètres h et h' du Soleil et de la Lune donnés par les éphémérides, en en retranchant les quantités qui, dans cette Table, répondent aux déclinaisons de ces astres. On aura ainsi, à fort peu près,

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 \sin 2(\psi - \psi')}{2,89841 \cdot \left(\frac{h'}{H'}\right)^3 + \left(\frac{h}{H}\right)^3 \cos 2(\psi - \psi')},$$

h et h' étant ici les demi-diamètres du Soleil et de la Lune, corrigés par ce qui précède. Par ce moyen, les déclinaisons du Soleil et de la Lune disparaissent de l'expression de $nt + \varpi - \psi' - \lambda$. A la rigueur, il faudrait retrancher du demi-diamètre du Soleil la quantité $h(1 - \sqrt[3]{\cos^2 v})$; mais cette quantité étant fort petite, et la valeur de h différant peu de $\frac{2,89841 . H' + H}{3,89841}$, on peut y substituer pour h cette dernière quantité. La même remarque s'applique à la correction du demi-diamètre de la Lune; et, comme l'influence de cet astre sur l'heure des marées est à celle du Soleil dans le rapport de 2,89841 à l'unité, les demi-diamètres

H' et H entrent suivant ce rapport dans la fonction $\frac{2,89841 . H' + H}{3,89841}$. Si l'on considère ensuite que la différence de $\frac{h'H}{hH'}$ à $\frac{H + h' - h}{H'}$ est $\frac{(H - h)(h' - h)}{hH'}$, et qu'elle peut être négligée, vu la petitesse des deux facteurs $H - h$ et $h' - h$, on aura

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc tang} \frac{\sin 2(\psi - \psi')}{2,89841 \cdot \left(\frac{H + h' - h}{H'}\right)^2 + \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

On peut facilement réduire en table cette expression de $nt + \varpi - \psi' - \lambda$, et en convertissant les angles en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour, on aura la loi des retards des marées sur l'instant du passage de la Lune au méridien supérieur ou inférieur, instant déterminé par la condition de $nt + \varpi - \psi' = 0$, ou $nt + \varpi - \psi' = 200°$. Mais, pour se servir de cette Table, il faut connaître dans chaque port le temps dont le maximum de la marée suit la syzygie. On a vu qu'à Brest ce temps est de $1^j,50724$, et, suivant les observations, il est à peu près le même dans tous nos ports de l'Océan, en sorte que les valeurs de $nt + \varpi - \psi' - \lambda$ correspondent aux valeurs de $\psi - \psi'$ qui précèdent de $1^j,50724$ l'instant pour lequel on calcule. Il faut, de plus, connaître la constante λ : cette constante, réduite en temps, est l'heure de la pleine mer qui suit la syzygie de $1^j,50724$; on pourra ainsi la déterminer par un grand nombre d'observations de l'heure de la pleine mer du second jour après la syzygie.

43. Rappelons en peu de mots les principaux phénomènes des marées et leurs rapports avec la loi de la pesanteur universelle. Nous avons principalement considéré ces phénomènes vers leurs maxima et vers leurs minima, et nous les avons partagés en deux classes, l'une relative aux hauteurs des marées, l'autre relative aux heures des marées et à leurs intervalles : examinons séparément ces deux classes de phénomènes.

Les hauteurs des marées dans chaque port, à leur maximum vers les syzygies et à leur minimum vers les quadratures, sont les données de

l'observation qui peuvent le mieux faire connaître le rapport des actions du Soleil et de la Lune sur les marées, et au moyen de ce rapport les divers phénomènes des marées qui résultent de la théorie de la pesanteur universelle. L'un de ces phénomènes, très-propre à vérifier cette théorie, est la loi de diminution des marées en partant du maximum, et la loi de leur accroissement en partant du minimum. On a vu, dans les nos 25 et 31, que la théorie de la pesanteur s'accorde parfaitement sur ce point avec les observations.

Ces lois de diminution et d'accroissement des marées varient avec les déclinaisons du Soleil et de la Lune : on a vu, dans le n° 26, que leur diminution vers les syzygies des équinoxes est à la diminution correspondante vers les syzygies des solstices dans le rapport de 13 à 8, et que ce résultat est conforme à la théorie de la pesanteur. Pareillement on a vu, dans le n° 32, que l'accroissement des marées, en partant de leur minimum vers les quadratures des équinoxes, est à l'accroissement correspondant vers les quadratures des solstices comme 2 est à 1, et que la théorie de la pesanteur donne à fort peu près le même rapport. Suivant cette théorie, la hauteur des marées totales dans leur maximum, vers les syzygies des équinoxes, est à leur hauteur correspondante, vers les syzygies des solstices, à peu près comme le carré du rayon est au carré du cosinus de la déclinaison des astres vers les solstices, et l'on a vu, dans le n° 26, que cela diffère peu du résultat des observations. Par la même théorie, l'excès de la hauteur des marées totales dans leur minimum vers les quadratures des solstices, sur leur hauteur correspondante vers les quadratures des équinoxes, est le même que l'excès de la hauteur des marées totales dans leur maximum vers les syzygies des équinoxes sur leur hauteur correspondante vers les syzygies des solstices, et l'on voit, par les nos 26 et 32, que cela est exactement conforme aux observations.

L'influence de la Lune sur les marées croît, par le principe de la pesanteur, comme le cube de sa parallaxe, et, par le n° 28, cela est tellement d'accord avec les observations que l'on eût pu en conclure exactement la loi de cette influence.

Les phénomènes des intervalles des marées ne s'accordent pas moins avec la théorie que ceux de leurs hauteurs. Suivant cette théorie, le retard des marées d'un jour à l'autre est environ deux fois moindre à leur maximum vers les syzygies qu'à leur minimum vers les quadratures; il est de 27 minutes à peu près dans le premier cas, et de 55 minutes dans le second. On a vu, dans les n°s 35 et 39, que les observations s'éloignent fort peu de ces résultats de la théorie.

Le retard des marées varie avec les déclinaisons des astres; il doit être plus grand vers les syzygies des solstices que vers celles des équinoxes, dans le rapport de 8 à 7; vers les quadratures des équinoxes, il doit être plus grand que vers celles des solstices, dans le rapport de 13 à 9. On a vu, dans les n°s 36 et 39, que les observations donnent à peu près ces mêmes rapports.

Les distances de la Lune à la Terre influent sur le retard des marées. Suivant la théorie, 1 minute d'accroissement dans le demi-diamètre de la Lune donne 251 secondes d'accroissement dans ce retard vers les syzygies, et 90 secondes seulement vers les quadratures, et l'on a vu, dans les n°s 37 et 40, que cela est d'accord avec les observations qui confirment ainsi, sous tous les rapports, la loi de la pesanteur universelle.

J'ai insisté sur le flux et le reflux de la mer, parce qu'il est, de tous les résultats des attractions célestes, le plus près de nous, et que nous pouvons à chaque instant en reconnaître les lois. J'espère que la théorie que je viens de présenter de ses phénomènes déterminera les observateurs à les suivre dans les ports favorables à ce genre d'observations, tels que celui de Brest. Des observations exactes et continuées pendant une période du mouvement des nœuds de la Lune fixeront avec précision les éléments de la théorie du flux et du reflux de la mer, et peut-être feront connaître les petits flux partiels dépendants de la quatrième puissance inverse de la distance de la Lune à la Terre, phénomènes enveloppés jusqu'ici dans les erreurs des observations.

CHAPITRE V.

DES OSCILLATIONS DE L'ATMOSPHÈRE.

44. Dans l'impossibilité de soumettre à l'Analyse les mouvements de l'atmosphère dus aux variations de la chaleur du Soleil et à toutes les circonstances qui modifient ces mouvements, nous nous bornerons à considérer les oscillations dépendantes des attractions du Soleil et de la Lune, en supposant à l'atmosphère une température uniforme et une densité variable, proportionnelle dans chaque point à la force comprimante. En partant de ces hypothèses, nous sommes parvenus, dans le n° 37 du Livre I, dont je conserverai ici toutes les dénominations, aux deux équations suivantes

$$r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v'}{\partial t}\right)+r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u'}{\partial t}\right)=\delta V'-g\delta y'-g\delta y,$$

$$y'=-l\left(\frac{\partial u'}{\partial\theta}+\frac{\partial v'}{\partial\varpi}+\frac{u'\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Si l'on suppose à la mer une profondeur constante égale à l', et si l'on fait abstraction de sa densité, comme nous l'avons fait dans les nos 10 et suivants, on aura, par le n° 36 du Livre I,

$$r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)+r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\delta V'-g\delta y,$$

$$y=-l'\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial\varpi}+\frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

la valeur de V' étant la même ici que dans les équations précédentes.

En faisant donc

$$(l-l')u'+l'u=lu'',$$
$$(l-l')v'+l'v=lv'',$$
$$(l-l')y'+ly=ly'',$$

les quatre équations précédentes donneront celles-ci

$$r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v''}{\partial t}\right)+r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v''}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u''}{\partial t}\right)=\delta V'-g\delta y'',$$

$$y''=-l\left(\frac{\partial u''}{\partial\theta}+\frac{\partial v''}{\partial\varpi}+\frac{u''\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Ces deux équations sont évidemment celles des oscillations de la mer, en lui supposant la profondeur l, et dans ce cas on peut déterminer la valeur de y'', ainsi que celle de y, par le Chapitre I de ce Livre; on aura donc ainsi la valeur de y' par l'analyse exposée dans ce Chapitre.

Nous avons observé, dans le n° 37 du Livre I, que, k étant la hauteur du baromètre dans l'état d'équilibre, ses oscillations sont représentées par la formule $\frac{\alpha k(y+y')}{l}$, et par conséquent par celle-ci

$$\frac{\alpha k(ly''-l'y)}{l(l-l')}.$$

Il est facile de voir, par le n° 37 du Livre I, que l est le rapport de la hauteur de l'atmosphère au rayon terrestre, en supposant la densité de l'air et sa température partout les mêmes; or on trouve par l'expérience qu'à la température de la glace fondante la densité du mercure est à celle de l'air à peu près dans le rapport de 10320 à l'unité, et comme la hauteur moyenne du baromètre est d'environ $0^m,76$, il en résulte que $l=\frac{1}{812}$. A des températures plus élevées, la valeur de l augmente. Pour avoir une idée des oscillations du baromètre, nous supposerons la température telle que $l=\frac{1}{722,5}$, ce qui est une des profondeurs de la mer pour lesquelles nous avons déterminé, dans le n° 11, la valeur de αy, qui sera dans ce cas celle de $\alpha y''$; nous supposerons, de plus, $l'=2l$,

ce qui est encore une des profondeurs de la mer que nous avons considérées; la valeur de αy sera celle qui est relative à cette profondeur. En substituant donc pour l, l' ces valeurs, et pour αy et $\alpha y''$ les quantités que nous avons trouvées dans le n° **11**, en considérant ensuite que $k = 0^{\mathrm{m}},76$, et que le rayon terrestre est égal à 6366200 mètres, on aura, pour déterminer les oscillations du baromètre,

$$\frac{\alpha k(ly''-l'y)}{l(l-l')} = \frac{\alpha k}{l}(2y-y'') = 0^{\mathrm{m}},000010623 \cdot \frac{1+3\cos 2\theta}{3}\left(\sin^2 v - \tfrac{1}{2}\cos^2 v + e\sin^2 v' - \tfrac{1}{2}e\cos^2 v'\right)$$

$$+\,0^{\mathrm{m}},000010623 \cdot \left\{\begin{array}{l} 1,0000 \\ -4,6952.\sin^2\theta \\ -2,9342.\sin^4\theta \\ -0,6922.\sin^6\theta \\ -0,0899.\sin^8\theta \\ -0,0076.\sin^{10}\theta \end{array}\right\} \sin^2\theta \cdot \left\{\begin{array}{l} \cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi) \\ +\,e\cos^2 v'\cos 2(nt+\varpi-\psi') \end{array}\right\}.$$

Si l'on suppose le Soleil et la Lune en conjonction ou en opposition dans le plan de l'équateur, et dans leurs moyennes distances, où $e = 3$ à fort peu près, on aura à l'équateur $0^{\mathrm{m}},0006305$ pour la différence de la plus grande élévation à la plus grande dépression du mercure dans le baromètre. Cette quantité, quoique très-petite, peut être déterminée par une longue suite d'observations barométriques faites entre les tropiques, où les variations du baromètre sont peu considérables : ce phénomène est digne de l'attention des observateurs.

L'action du Soleil et de la Lune excite un vent correspondant au flux et au reflux de la mer; déterminons la force de ce vent à l'équateur, dans les suppositions précédentes. Pour cela, nous reprendrons la première équation de ce numéro, et nous y ferons $\cos\theta = 0$; elle donnera

$$\frac{d^2 v'}{dt^2} = -g\frac{\partial y'}{\partial\varpi} - g\frac{\partial y}{\partial\varpi} + \frac{\partial V'}{\partial\varpi};$$

or on a $y'+y = 2y-y''$; de plus, on a, par les n^{os} **4** et **11**,

$$\alpha\frac{\partial V'}{\partial\varpi} = -2g.0^{\mathrm{m}},12316.\left[\cos^2 v\sin 2(nt+\varpi-\psi) + e\cos^2 v'\sin 2(nt+\varpi-\psi')\right];$$

du Soleil et de la Lune excite dans l'atmosphère peuvent modifier les mouvements produits par les causes diverses qui agitent un fluide aussi mobile, et dans lequel, à raison de cette grande mobilité, une cause très-légère peut être la source de changements considérables. L'observation peut seule nous instruire à cet égard; nous observerons seulement que, si l'atmosphère recouvrait immédiatement le noyau solide de la Terre, les équations différentielles de son mouvement seraient, par ce qui précède, les mêmes que celles de la mer, en lui supposant partout une même profondeur; or on a vu, dans le n° 8, que les oscillations de la seconde espèce, les seules qui dépendent de la différence entre les déclinaisons boréales et australes du Soleil et de la Lune, disparaissent; ces oscillations disparaissent encore, ou du moins sont presque insensibles, lorsque l'atmosphère recouvre une mer dans laquelle ces oscillations sont nulles ou très-petites, ainsi que cela a lieu dans nos ports; le signe de la déclinaison des deux astres n'a donc pas d'influence sensible sur les modifications de l'atmosphère.

LIVRE V.

DES MOUVEMENTS DES CORPS CÉLESTES AUTOUR DE LEURS PROPRES CENTRES DE GRAVITÉ.

Les mouvements des corps célestes autour de leurs propres centres de gravité ont une telle liaison avec leurs figures et les oscillations des fluides qui les recouvrent, que nous croyons devoir en présenter l'analyse immédiatement après les théories exposées dans les deux Livres précédents. Nous ne considérerons, parmi les corps du système solaire, que la Terre, la Lune et les anneaux de Saturne, les seuls par rapport auxquels la théorie de la pesanteur puisse être comparée sous ce rapport aux observations; mais l'analyse suivante peut s'étendre généralement à tous les corps célestes.

CHAPITRE PREMIER.

DES MOUVEMENTS DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

1. Rappelons ici les équations générales du mouvement d'un corps solide de figure quelconque, démontrées dans le Chapitre VII du Livre I. Si l'on conserve toutes les dénominations de ce Chapitre, les équations (D) du n° 26 du Livre I se réduisent aux suivantes, en y sub-

stituant, au lieu de p', q', r', leurs valeurs Cp, Aq et Br,

$$
(D')\quad \left\{
\begin{aligned}
&dp + \frac{B-A}{C}\,qr\,dt = \frac{dN}{C}\cos\theta - \frac{dN'}{C}\sin\theta,\\
&dq + \frac{C-B}{A}\,rp\,dt = -\frac{dN\sin\theta + dN'\cos\theta}{A}\sin\varphi + \frac{dN''}{A}\cos\varphi,\\
&dr + \frac{A-C}{B}\,pq\,dt = -\frac{dN\sin\theta + dN'\cos\theta}{B}\cos\varphi - \frac{dN''}{B}\sin\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut présentement déterminer les moments d'inertie A, B, C, et les valeurs de dN, dN' et dN''.

2. Considérons d'abord les moments d'inertie. Soit R le rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa molécule dm; soit μ le cosinus de l'angle que R forme avec l'axe de l'équateur; soit encore ϖ l'angle que forme le plan qui passe par cet axe et par le rayon R, avec le plan qui passe par le même axe et par le premier axe principal; $R\sqrt{1-(1-\mu^2)\cos^2\varpi}$ sera la distance de la molécule au premier axe principal; $R\sqrt{1-(1-\mu^2)\sin^2\varpi}$ sera la distance de la molécule au second axe principal, et $R\sqrt{1-\mu^2}$ sera sa distance au troisième axe principal ou à l'axe de l'équateur. Ainsi, le moment d'inertie d'un corps relativement à un de ses axes étant la somme des produits de chaque molécule du corps par le carré de sa distance à cet axe, et A, B, C étant, par le n° 26 du Livre I, les moments d'inertie de la Terre, par rapport au premier, au second et au troisième axe principal, on aura

$$
\begin{aligned}
A &= \int R^2 dm[1-(1-\mu^2)\cos^2\varpi],\\
B &= \int R^2 dm[1-(1-\mu^2)\sin^2\varpi],\\
C &= \int R^2 dm(1-\mu^2),
\end{aligned}
$$

les intégrales devant s'étendre à la masse entière de la Terre.

Maintenant, on a

$$dm = R^2 dR\, d\mu\, d\varpi;$$

si l'on observe ensuite que les intégrales doivent être prises depuis

$R = 0$ jusqu'à la valeur de R à la surface, valeur que nous désignerons par R', on aura

$$A = \tfrac{1}{5}\iint R'^5 d\mu\, d\varpi [1 - (1-\mu^2)\cos^2\varpi],$$
$$B = \tfrac{1}{5}\iint R'^5 d\mu\, d\varpi [1 - (1-\mu^2)\sin^2\varpi],$$
$$C = \tfrac{1}{5}\iint R'^5 d\mu\, d\varpi (1-\mu^2).$$

Supposons R'^5 développé dans une série de cette forme

$$R'^5 = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots,$$

$U^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, assujettie à l'équation aux différences partielles

$$0 = \frac{\partial . (1-\mu^2)\dfrac{\partial U^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\dfrac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)U^{(i)}.$$

La fonction $1 - (1-\mu^2)\cos^2\varpi$ est égale à $\frac{2}{3} + [\frac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi]$; la constante $\frac{2}{3}$ est comprise dans la forme $U^{(0)}$, et la fonction $\frac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi$ est de la forme $U^{(2)}$, puisqu'elle satisfait pour $U^{(2)}$ à l'équation précédente aux différences partielles. Pareillement, $1 - (1-\mu^2)\sin^2\varpi$ est égal à $\frac{2}{3} + [\frac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi]$, et le second terme de cette expression est de la forme $U^{(2)}$. Enfin la fonction $1-\mu^2$ est égale à $\frac{2}{3} + (\frac{1}{3} - \mu^2)$, et la partie $\frac{1}{3} - \mu^2$ est de la forme $U^{(2)}$; on aura donc, en vertu du théorème que nous avons démontré dans le Livre III, n° 12,

$$A = \tfrac{1}{5}\iint d\mu\, d\varpi \{\tfrac{2}{3}U^{(0)} + [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi]U^{(2)}\},$$
$$B = \tfrac{1}{5}\iint d\mu\, d\varpi \{\tfrac{2}{3}U^{(0)} + [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi]U^{(2)}\},$$
$$C = \tfrac{1}{5}\iint d\mu\, d\varpi [\tfrac{2}{3}U^{(0)} + (\tfrac{1}{3} - \mu^2)U^{(2)}].$$

Les intégrales doivent être prises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$, ce qui donne

$$A = \tfrac{8}{15}\pi U^{(0)} + \tfrac{1}{5}\iint U^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi],$$
$$B = \tfrac{8}{15}\pi U^{(0)} + \tfrac{1}{5}\iint U^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi],$$
$$C = \tfrac{8}{15}\pi U^{(0)} + \tfrac{1}{5}\iint U^{(2)} d\mu\, d\varpi (\tfrac{1}{3} - \mu^2).$$

La fonction $U^{(2)}$ est de cette forme

$$H(\tfrac{1}{3}-\mu^2)+H'\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi+H''\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$$
$$+H'''(1-\mu^2)\sin 2\varpi+H^{\text{iv}}(1-\mu^2)\cos 2\varpi.$$

La considération des axes principaux donne, par le n° 31 du Livre III,

$$H'=0,\quad H''=0,\quad H'''=0.$$

Ces trois équations renferment toutes les conditions nécessaires pour que les trois axes soient des axes principaux. On aura ainsi

$$A=\frac{8\pi}{15}U^{(0)}-\frac{8\pi}{9.5^2}H-\frac{8\pi}{3.5^2}H^{\text{iv}},$$
$$B=\frac{8\pi}{15}U^{(0)}-\frac{8\pi}{9.5^2}H+\frac{8\pi}{3.5^2}H^{\text{iv}},$$
$$C=\frac{8\pi}{15}U^{(0)}+\frac{16\pi}{9.5^2}H.$$

Si l'on veut que les trois moments d'inertie A, B, C soient égaux entre eux, on aura $H=0$, $H^{\text{iv}}=0$, et par conséquent $U^{(2)}=0$; cette dernière équation satisfait donc à la fois aux conditions des trois axes principaux et à l'égalité des trois moments d'inertie. Or on a vu, dans le n° 27 du Livre I, qu'alors les moments d'inertie sont égaux par rapport à tous les axes; la sphère n'est donc pas le seul solide qui jouisse de cette propriété. L'analyse précédente donne l'équation générale de tous les solides auxquels elle appartient, équation que nous avons annoncée dans le numéro cité du Livre I. On doit observer ici que ces résultats sont indépendants de la supposition que l'origine de R′ passe par le centre de gravité du sphéroïde, et qu'ainsi ils ont lieu, quel que soit le point où l'on fixe cette origine dans son intérieur.

La Terre étant supposée formée d'une infinité de couches variables du centre à la surface, le rayon R d'une de ses couches peut toujours être exprimé de cette manière

$$R=a+\alpha a(Y^{(1)}+Y^{(2)}+Y^{(3)}+Y^{(4)}+\ldots),$$

α étant un très-petit coefficient constant, et $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, ... étant des

fonctions de la même nature que $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., c'est-à-dire qui peuvent satisfaire à la même équation aux différences partielles, et qui, de plus, peuvent renfermer a d'une manière quelconque. En négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$R^5 = a^5 + 5\alpha a^5 (Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \ldots);$$

partant, si l'on conçoit un solide homogène d'une densité représentée par l'unité, et dont le rayon de la surface soit celui de la couche dont il s'agit, on aura, relativement à ce solide,

$$A = \frac{8\pi a^5}{15} + \alpha \int\int a^5 Y^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi],$$

$$B = \frac{8\pi a^5}{15} + \alpha \int\int a^5 Y^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi],$$

$$C = \frac{8\pi a^5}{15} + \alpha \int\int a^5 Y^{(2)} d\mu\, d\varpi (\tfrac{1}{3} - \mu^2).$$

En différentiant ces valeurs par rapport à a, et en les multipliant ensuite par la densité de la couche dont le rayon est R, densité que nous représenterons par ρ, ρ étant une fonction quelconque de a, on aura les moments d'inertie de cette couche, et, pour avoir ceux de la Terre entière, il suffira d'intégrer les moments de la couche par rapport à a, depuis $a = 0$ jusqu'à la valeur de a relative à la surface de la Terre, valeur que nous désignerons par l'unité. On aura ainsi

$$A = \frac{8\pi}{15} \int \rho\, d.a^5 + \alpha \int\int\int \rho\, d(a^5 Y^{(2)})\, d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi],$$

$$B = \frac{8\pi}{15} \int \rho\, d.a^5 + \alpha \int\int\int \rho\, d(a^5 Y^{(2)})\, d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi],$$

$$C = \frac{8\pi}{15} \int \rho\, d.a^5 + \alpha \int\int\int \rho\, d(a^5 Y^{(2)})\, d\mu\, d\varpi (\tfrac{1}{3} - \mu^2),$$

la différence $d(a^5 Y^{(2)})$ étant uniquement relative à la variable a.

Il résulte de l'équation (2) du n° 29 du Livre III que, si l'on nomme $\alpha\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, on a,

par la condition de l'équilibre des fluides répandus sur la Terre,

$$\int \rho\, d(a^5 Y^{(2)}) = \tfrac{5}{3}[Y^{(2)} + \tfrac{1}{2}\varphi(\mu^2 - \tfrac{1}{3})] \int \rho\, d.a^3,$$

la valeur de $Y^{(2)}$ dans le second membre de cette équation étant relative à la surface de la Terre, et les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$; on aura par conséquent

$$A = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 + \frac{4\alpha\pi}{27}\varphi \int \rho\, d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}\int\int Y^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\cos^2\varpi] \int \rho\, d.a^3,$$

$$B = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 + \frac{4\alpha\pi}{27}\varphi \int \rho\, d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}\int\int Y^{(2)} d\mu\, d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin^2\varpi] \int \rho\, d.a^3,$$

$$C = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 - \frac{8\alpha\pi}{27}\varphi \int \rho\, d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}\int\int Y^{(2)} d\mu\, d\varpi (\tfrac{1}{3} - \mu^2) \int \rho\, d.a^3.$$

La fonction $Y^{(2)}$ est de cette forme

$$h(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h'\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi + h''\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$$
$$+ h'''(1-\mu^2)\sin 2\varpi + h^{\text{iv}}(1-\mu^2)\cos 2\varpi.$$

La considération des axes principaux donne, par le n° 32 du Livre III,

$$h' = 0, \quad h'' = 0, \quad h''' = 0,$$

et par conséquent

$$Y^{(2)} = h(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h^{\text{iv}}(1-\mu^2)\cos 2\varpi.$$

On a vu, dans le Livre III, que, la variation de la pesanteur étant à très-peu près proportionnelle au carré du sinus de la latitude, la valeur de h^{iv} doit être très-petite; elle serait nulle, en effet, si la Terre était un solide de révolution; mais, pour plus de généralité, nous la conserverons dans les recherches suivantes; nous aurons ainsi

$$A = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 - \tfrac{8}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\varphi)\int \rho\, d.a^3 - \tfrac{8}{9}\alpha\pi h^{\text{iv}}\int \rho\, d.a^3,$$

$$B = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 - \tfrac{8}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\varphi)\int \rho\, d.a^3 + \tfrac{8}{9}\alpha\pi h^{\text{iv}}\int \rho\, d.a^3,$$

$$C = \frac{8\pi}{15}\int \rho\, d.a^5 + \tfrac{16}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\varphi)\int \rho\, d.a^3.$$

3. Considérons présentement les valeurs de dN, dN', dN'' qui entrent dans les équations différentielles (D') du n° 1. Soit L la masse d'un astre qui agit sur la Terre; soient x, y, z les coordonnées de son centre, rapportées au centre de gravité de la Terre, et $r_{\prime} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; nommons x', y', z' les coordonnées d'une molécule dm du sphéroïde terrestre; supposons enfin

$$V = -L\frac{xx' + yy' + zz'}{r_{\prime}^3} + \frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}};$$

les forces attractives de L sur la molécule dm, décomposées parallèlement aux axes des x, des y et des z, en sens opposé à leur origine, et diminuées des mêmes forces attractives sur le centre de gravité de la Terre, que nous considérons ici comme immobile, seront $\frac{\partial V}{\partial x'}$, $\frac{\partial V}{\partial y'}$, $\frac{\partial V}{\partial z'}$. Ces forces sont celles que nous avons désignées par P, Q, R dans le n° 25 du Livre I; on aura donc, par ce même numéro,

$$\frac{dN}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int dm\left(y'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial y'}\right).$$

Si l'on observe ensuite que l'on a

$$x'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial x'} = y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y},$$

on aura

$$\frac{dN}{dt} = \int dm\left(y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int dm\left(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int dm\left(z\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Les coordonnées x', y', z' étant supposées très-petites relativement à la distance $r_{,}$ de l'astre L au centre de gravité de la Terre, on peut développer V dans une suite fort convergente par rapport aux puissances réciproques de $r_{,}$; on aura ainsi, à fort peu près,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5} \int dm(xx' + yy' + zz')(yx' - xy'),$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5} \int dm(xx' + yy' + zz')(zx' - xz'),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5} \int dm(xx' + yy' + zz')(zy' - yz').$$

On a vu, dans le n° 28 du Livre I, que les valeurs de p, q, r sont indépendantes de la position du plan des x et des y; or, si nous prenons pour ce plan l'équateur même de la Terre, on aura $\theta = 0$, et si nous prenons pour l'axe des x le premier axe principal, nous aurons $\varphi = 0$; nous aurons de plus, par le n° 26 du Livre I,

$$\int dm(y'^2 + z'^2) = A, \quad \int dm(x'^2 + z'^2) = B, \quad \int dm(x'^2 + y'^2) = C,$$

$$\int x'y'dm = 0, \quad \int x'z'dm = 0, \quad \int y'z'dm = 0;$$

partant,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5}(B - A)xy,$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5}(C - A)xz,$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^5}(C - B)yz;$$

les équations (D') du n° 1 deviendront ainsi

$$(F) \quad \begin{cases} dp + \dfrac{B - A}{C} qr\,dt = \dfrac{3L\,dt}{r_{,}^5} \dfrac{B - A}{C} xy, \\ dq + \dfrac{C - B}{A} rp\,dt = \dfrac{3L\,dt}{r_{,}^5} \dfrac{C - B}{A} yz, \\ dr + \dfrac{A - C}{B} pq\,dt = \dfrac{3L\,dt}{r_{,}^5} \dfrac{A - C}{B} xz. \end{cases}$$

Ces équations supposent que $r_{\prime}$ est fort grand par rapport au rayon du sphéroïde terrestre, ce qui est vrai relativement au Soleil et à la Lune; mais il est remarquable qu'elles seraient encore très-approchées dans le cas où, l'astre attirant étant fort près de la Terre, la figure de cette planète serait elliptique. Pour le faire voir, nous observerons que l'on a, par le n° 2,

$$x' = R\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi, \quad y' = R\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi, \quad z' = R\mu.$$

Si l'on nomme ν et λ ce que deviennent, par rapport à l'astre L, les quantités μ et ϖ relatives à la molécule dm du sphéroïde terrestre, on aura

$$x = r_{\prime}\sqrt{1-\nu^2}\cos\lambda, \quad y = r_{\prime}\sqrt{1-\nu^2}\sin\lambda, \quad z = r_{\prime}\nu;$$

si l'on substitue ces valeurs dans la fonction V, et qu'ensuite on la développe par rapport aux puissances de $\frac{R}{r_{\prime}}$, on aura une série de cette forme

$$\frac{L}{r_{\prime}} + \frac{LR^2}{r_{\prime}^3}U^{(2)} + \frac{LR^3}{r_{\prime}^4}U^{(3)} + \ldots,$$

et il est facile de s'assurer, par le n° 23 du Livre III, que les fonctions $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ... sont des fonctions telles que l'on a généralement

$$0 = \frac{\partial.(1-\mu^2)\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\mu}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)U^{(i)}.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$\frac{dN}{dt} = \int dm\left(y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}\right);$$

on aura

$$\begin{aligned} y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y} = {} & \frac{LR^2}{r_{\prime}^3}\left(y\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} - x\frac{\partial U^{(2)}}{\partial y}\right) \\ & + \frac{LR^3}{r_{\prime}^4}\left(y\frac{\partial U^{(3)}}{\partial x} - x\frac{\partial U^{(3)}}{\partial y}\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les différences partielles du second membre de cette équation étant

prises par rapport à des variables indépendantes de μ et de ϖ, si l'on désigne généralement par $U'^{(i)}$ la fonction $y\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - x\frac{\partial U^{(i)}}{\partial y}$, on aura

$$0 = \frac{\partial.\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial U'^{(i)}}{\partial\mu}\right\}}{\partial\mu} + \frac{\frac{\partial^2 U'^{(i)}}{\partial\varpi^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)U'^{(i)},$$

en sorte que la fonction $U'^{(i)}$ est de la même nature que les fonctions $Y^{(i)}$ et $U^{(i)}$; l'expression précédente de $\frac{dN}{dt}$ deviendra ainsi, par ce que l'on a vu dans le n° 2, et en substituant pour dm sa valeur $R^2 dR\,\rho\,d\mu\,d\varpi$, et pour R sa valeur $a + \alpha a(Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots)$,

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \frac{\alpha L}{r_i^3}\int\!\!\int\!\!\int d(a^5 Y^{(2)})\,U'^{(2)}\rho\,d\mu\,d\varpi\\ &+ \frac{\alpha L}{r_i^4}\int\!\!\int\!\!\int d(a^6 Y^{(3)})\,U'^{(3)}\rho\,d\mu\,d\varpi\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

les différentielles $d(a^5 Y^{(2)})$, $d(a^6 Y^{(3)})$, ... étant relatives à la variable a; or l'équation (2) du n° 29 du Livre III donne généralement, à la surface de la Terre et lorsque i surpasse 2,

$$\int\rho\,d(a^{i+3}Y^{(i)}) = \frac{2i+1}{3}Y^{(i)}\int\rho\,d.a^3,$$

les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$, et $Y^{(i)}$ dans le second membre de cette équation étant relatif à la surface de la Terre; on aura donc

$$\frac{\alpha L}{r_i^4}\int\!\!\int\!\!\int d(a^6 Y^{(3)})\,U'^{(3)}\rho\,d\mu\,d\varpi = \frac{7\alpha L}{3r_i^4}\int\!\!\int Y^{(3)}U'^{(3)}d\mu\,d\varpi\int\rho\,d.a^3.$$

Si la figure de la Terre est celle d'un ellipsoïde, $Y^{(3)}$ est nul, et alors l'expression de $\frac{dN}{dt}$ se réduit à son premier terme, non-seulement à cause de la grandeur de r_i, mais parce que les valeurs de $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, .. sont nulles. Quoique la figure elliptique ne satisfasse pas exactemen aux degrés mesurés des méridiens, cependant l'accord des variatio

de la pesanteur avec cette figure indique que $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, ... sont peu considérables par rapport à $Y^{(2)}$; on peut donc calculer les mouvements de l'axe de la Terre, en lui supposant une figure elliptique, sans craindre aucune erreur.

4. Rapportons maintenant les coordonnées de l'astre L à un plan fixe, que nous supposerons être celui de l'écliptique à une époque donnée; soient X, Y, Z ces nouvelles coordonnées, l'axe des X étant la ligne menée du centre de la Terre à l'équinoxe du printemps, l'axe des Y étant la ligne menée du même centre au premier point du Cancer, et la ligne des Z étant la ligne menée de ce même centre au pôle boréal de l'écliptique : on aura, par le n° 21 du Livre I,

$$x = X\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\sin\varphi,$$

$$y = Y\cos\theta\cos\varphi - X\sin\varphi - Z\sin\theta\cos\varphi,$$

$$z = Y\sin\theta + Z\cos\theta.$$

Les équations différentielles (F) du numéro précédent deviendront ainsi

$$(G)\quad\left\{\begin{aligned} dp + \frac{B-A}{C}qr\,dt &= \frac{3L\,dt(B-A)}{2r_{,}^5 C}\left\{\begin{aligned}&(Y^2\cos^2\theta + Z^2\sin^2\theta - X^2 - 2YZ\sin\theta\cos\theta)\sin 2\varphi\\ &\quad + (2XY\cos\theta - 2XZ\sin\theta)\cos 2\varphi\end{aligned}\right\},\\ dq + \frac{C-B}{A}rp\,dt &= \frac{3L\,dt(C-B)}{r_{,}^5 A}\left\{\begin{aligned}&[(Y^2 - Z^2)\sin\theta\cos\theta + YZ(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]\cos\varphi\\ &\quad - (XY\sin\theta + XZ\cos\theta)\sin\varphi\end{aligned}\right\},\\ dr + \frac{A-C}{B}pq\,dt &= \frac{3L\,dt(A-C)}{r_{,}^5 B}\left\{\begin{aligned}&(XY\sin\theta + XZ\cos\theta)\cos\varphi\\ &\quad + [(Y^2 - Z^2)\sin\theta\cos\theta + YZ(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]\sin\varphi\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Intégrons présentement ces équations. Si les deux moments d'inertie A et B étaient égaux, ce qui aurait lieu dans le cas où la Terre serait un sphéroïde de révolution, la première de ces équations donnerait $dp = 0$, et par conséquent p constant; lorsqu'il y a une petite différence entre ces deux moments d'inertie, la valeur de p renferme des inégalités périodiques, mais elles sont insensibles; en effet, l'axe instantané de rotation s'éloignant toujours très-peu du premier axe principal, q et r sont de très-petites quantités, et l'on peut, sans erreur

sensible, négliger le terme $\frac{B-A}{C} rq\,dt$ de la première des équations (G). Le second membre de la même équation se développe en sinus et cosinus d'angles croissant avec rapidité, puisque ses termes sont multipliés par le sinus ou le cosinus de 2φ; ces termes doivent donc être encore insensibles après les intégrations : on peut ainsi supposer, dans les deux dernières des équations (G), $p=n$, n étant la vitesse moyenne angulaire de rotation de la Terre autour de son troisième axe principal. Mais, comme la discussion de la valeur de p est très-importante, à cause de son influence sur la durée du jour, nous reviendrons sur cet objet, après avoir déterminé les valeurs de q et de r.

Faisons, pour abréger,

$$\frac{3L}{r_{,}^{5}}[(Y^2-Z^2)\sin\theta\cos\theta+YZ(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]=P,$$

$$\frac{3L}{r_{,}^{5}}(XY\sin\theta+XZ\cos\theta)=P';$$

les deux dernières équations (G) deviendront

$$dq+\frac{C-B}{A}rp\,dt=\frac{C-B}{A}dt(P\cos\varphi-P'\sin\varphi),$$

$$dr+\frac{A-C}{B}pq\,dt=\frac{A-C}{B}dt(P'\cos\varphi+P\sin\varphi).$$

P et P′ peuvent être développés en sinus et cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps. Soit $k\cos(it+\varepsilon)$ un terme quelconque de P, et $k'\sin(it+\varepsilon)$ le terme correspondant de P′; on aura, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$dq+\frac{C-B}{A}rp\,dt=\frac{C-B}{2A}dt[(k+k')\cos(\varphi+it+\varepsilon)+(k-k')\cos(\varphi-it-\varepsilon)],$$

$$dr+\frac{A-C}{B}pq\,dt=\frac{A-C}{2B}dt[(k+k')\sin(\varphi+it+\varepsilon)+(k-k')\sin(\varphi-it-\varepsilon)].$$

Si l'on suppose dans ces équations

$$q=M\sin(\varphi+it+\varepsilon)+N\sin(\varphi-it-\varepsilon),$$
$$r=M'\cos(\varphi+it+\varepsilon)+N'\cos(\varphi-it-\varepsilon),$$

on aura, en observant que $d\varphi$ est à très-peu près égal à $n\,dt$,

$$M = \frac{\frac{k+k'}{2}(C-B)[n(A+B-C)+iB]}{(n+i)^2AB - n^2(A-C)(B-C)},$$

$$M' = \frac{\frac{k+k'}{2}(C-A)[n(A+B-C)+iA]}{(n+i)^2AB - n^2(A-C)(B-C)},$$

$$N = \frac{\frac{k-k'}{2}(C-B)[n(A+B-C)-iB]}{(n-i)^2AB - n^2(A-C)(B-C)},$$

$$N' = \frac{\frac{k-k'}{2}(C-A)[n(A+B-C)-iA]}{(n-i)^2AB - n^2(A-C)(B-C)}.$$

Reprenons maintenant les équations du n° 26 du Livre I,

$$d\varphi - d\psi\cos\theta = p\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\sin\varphi - d\theta\cos\varphi = q\,dt,$$
$$d\psi\sin\theta\cos\varphi + d\theta\sin\varphi = r\,dt.$$

Ces équations donnent

$$d\theta = r\,dt\sin\varphi - q\,dt\cos\varphi;$$

on aura donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M'-M}{2}\sin(2\varphi+it+\varepsilon) + \frac{N'-N}{2}\sin(2\varphi-it-\varepsilon) + \frac{N+N'-M-M'}{2}\sin(it+\varepsilon).$$

Nous pouvons négliger les deux premiers termes de cette expression de $\frac{d\theta}{dt}$, parce qu'ils sont insensibles en eux-mêmes, et que d'ailleurs ils n'augmentent point par l'intégration. Il n'en est pas ainsi du troisième terme, que l'intégration peut rendre sensible, si i est fort petit. Dans ce cas, on peut négliger i relativement à n, et l'on a, à fort peu près,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{A+B-2C}{2nC}k'\sin(it+\varepsilon).$$

Les expressions précédentes de $q\,dt$ et de $r\,dt$ donnent

$$d\psi \sin\theta = r\,dt\cos\varphi + q\,dt\sin\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \frac{M'-M}{2}\cos(2\varphi+it+\varepsilon) + \frac{N'-N}{2}\cos(2\varphi-it-\varepsilon) + \frac{M+M'+N+N'}{2}\cos(it+\varepsilon):$$

en négligeant les deux premiers termes de cette expression, qui sont toujours insensibles, et en supposant i fort petit, on aura, à très-peu près,

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \frac{2C-A-B}{2nC}\,k\cos(it+\varepsilon).$$

Si l'on désigne par $\Sigma k\cos(it+\varepsilon)$ la somme des termes dans lesquels P peut se développer, et par $\Sigma k'\sin(it+\varepsilon)$ la somme des termes dans lesquels P′ peut se développer, Σ étant la caractéristique des intégrales finies, on aura

$$(\mathrm{H})\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{A+B-2C}{2nC}\,\Sigma k'\sin(it+\varepsilon), \\[2ex] \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta = \dfrac{2C-A-B}{2nC}\,\Sigma k\cos(it+\varepsilon). \end{cases}$$

En intégrant ces équations sans avoir égard aux constantes arbitraires, on aura les parties de θ et de ψ qui dépendent de l'action de l'astre L. Pour avoir les valeurs complètes de ces variables, il faut leur ajouter les quantités qui dépendent de l'état initial du mouvement. Si l'on n'a égard qu'à cet état, les deux dernières des équations (G) deviennent

$$dq + \frac{C-B}{A}\,nr\,dt = 0, \qquad dr + \frac{A-C}{B}\,nq\,dt = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$q = G\sin(\lambda t + 6),$$

$$r = \frac{\lambda A}{n(B-C)}\,G\cos(\lambda t + 6),$$

d'où l'on tire

$$XY = \frac{r_i^2}{2}\cos^4\frac{\gamma}{2}\sin 2v + \frac{r_i^2}{4}\sin^2\gamma\sin 2\Lambda - \frac{r_i^2}{2}\sin^4\frac{\gamma}{2}\sin(2v - 4\Lambda),$$

$$XZ = \frac{r_i^2}{2}\sin\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}\sin(2v - \Lambda) - \frac{r_i^2}{4}\sin 2\gamma\sin\Lambda + \frac{r_i^2}{2}\sin\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin(2v - 3\Lambda).$$

Vu l'extrême lenteur du mouvement des points équinoxiaux, on peut supposer dv égal au mouvement angulaire du Soleil pendant l'instant dt, et l'on a, par les n°s 19 et 20 du Livre II,

$$r_i^2\,dv = a^2 m\,dt\sqrt{1 - e^2},$$

mt étant le moyen mouvement du Soleil, a étant sa moyenne distance à la Terre, et e étant le rapport de l'excentricité de son orbite à cette distance moyenne. On a de plus, par le n° 20 du même Livre, en négligeant les masses des planètes relativement à celle du Soleil, $\frac{L}{a^3} = m^2$, et l'équation à l'ellipse donne

$$\frac{a}{r_i} = \frac{1 + e\cos(v - \Gamma)}{1 - e^2};$$

Γ étant la longitude du périgée solaire; on aura donc, relativement au Soleil,

$$P'dt = \frac{3L\,dt}{r_i^5}(XY\sin\theta + XZ\cos\theta)$$

$$= \frac{3m\,dv[1 + e\cos(v - \Gamma)]}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{XY}{r_i^2}\sin\theta + \frac{XZ}{r_i^2}\cos\theta\right).$$

Si l'on substitue pour $\frac{XY}{r_i^2}$ et $\frac{XZ}{r_i^2}$ leurs valeurs précédentes en v, on verra d'abord, après avoir développé $P'dt$ en sinus de l'angle v et de ses multiples, que les termes dépendants de la longitude Γ du périgée solaire renferment l'angle v, et qu'ainsi ils ne peuvent pas devenir sensibles par l'intégration. Il n'en est pas de même des termes dépendants de la longitude du nœud : la fonction $\frac{XZ}{r_i^2}$ introduit dans $P'dt$

le terme $-\frac{3m\,dv}{4}\sin 2\gamma\cos\theta\sin\Lambda$, et, vu la lenteur des variations de γ et de Λ, ce terme peut devenir, par l'intégration, très-sensible dans la valeur de θ. On aura ainsi, à très-peu près, en observant que e et γ sont fort petits, et en ne conservant parmi les termes multipliés par ces quantités que ceux qui peuvent croitre considérablement par les intégrations,

$$\int P'dt = -\frac{3m}{4}\sin\theta\cos 2v - \frac{3m^2}{2}\cos\theta\int\gamma\,dt\sin\Lambda.$$

$\gamma\sin\Lambda$ est le produit de l'inclinaison de l'orbe solaire par le sinus de la longitude de son nœud ascendant, comptée de l'équinoxe mobile du printemps, et, cette inclinaison étant fort petite, on peut prendre pour γ ou son sinus ou sa tangente; or on a vu, dans le n° 59 du Livre II, que, si l'on désigne par Γ la longitude du nœud ascendant de cet orbe comptée d'un équinoxe fixe, $\tang\gamma\sin\Gamma$ est donné par un nombre fini de termes de la forme $c\sin(gt+6)$, et que $\tang\gamma\cos\Gamma$ est donné par le même nombre de termes correspondants $c\cos(gt+6)$; de plus, ψ étant le mouvement rétrograde des équinoxes à partir de l'équinoxe fixe, on a $\Lambda = \Gamma + \psi$, ce qui donne

$$\tang\gamma\sin\Lambda = \tang\gamma\sin\Gamma\cos\psi + \tang\gamma\cos\Gamma\sin\psi.$$

En substituant $c\sin(gt+6)$ au lieu de $\tang\gamma\sin\Gamma$, et $c\cos(gt+6)$ au lieu de $\tang\gamma\cos\Gamma$, on aura

$$\tang\gamma\sin\Lambda = c\sin(gt+6+\psi).$$

On voit donc que, pour avoir $\tang\gamma\sin\Lambda$, il suffit d'augmenter les angles des différents termes de l'expression de $\tang\gamma\sin\Gamma$ de la quantité ψ. On peut même, en négligeant les quantités de l'ordre c^2, substituer pour ψ le moyen mouvement des équinoxes, et alors $\tang\gamma\sin\Lambda$ sera composé d'un nombre fini de termes de la forme $c\sin(ft+6)$, qui ne diffèrent des termes de l'expression de $\tang\gamma\sin\Gamma$ qu'en ce que les angles gt sont augmentés du moyen mouvement des équinoxes. On trouvera de la même manière que $\tang\gamma\cos\Lambda$ sera composé du nombre

correspondant des termes de la forme $c\cos(ft+6)$; ainsi, en désignant par $\Sigma c\sin(ft+6)$ la somme de tous les termes de l'expression de $\tan\gamma\sin\Lambda$, l'expression de $\tan\gamma\cos\Lambda$ sera $\Sigma c\cos(ft+6)$, et ces quantités seront encore les expressions de $\gamma\sin\Lambda$ et de $\gamma\cos\Lambda$. On aura, cela posé, pour la partie de $\int P'dt$ dépendante de l'action du Soleil,

$$\int P'dt = -\frac{3m}{4}\sin\theta\cos 2v + \frac{3m^2}{2}\cos\theta\,\Sigma\frac{c}{f}\cos(ft+6).$$

Considérons présentement l'action de la Lune. En désignant par L′ sa masse, et par a' sa moyenne distance à la Terre; en nommant de plus, relativement à cet astre, m', v', Γ', e', Λ' et γ' ce que nous avons nommé m, v, Γ, e, Λ et γ relativement au Soleil, et faisant

$$\frac{L'}{a'^3} = \lambda m^2,$$

on trouvera, par l'analyse précédente,

$$\int P'dt = -\frac{3\lambda m^2}{4m'}\sin\theta\cos 2v' - \frac{3\lambda m^2}{2}\cos\theta\int\gamma'dt\sin\Lambda'.$$

La fonction $\frac{XY}{r_i^2}$ introduit encore dans l'intégrale $\int P'dt$ le terme

$$\frac{3m^2\lambda}{4}\sin\theta\int\gamma'^2dt\sin 2\Lambda'.$$

Ce terme croît beaucoup par l'intégration; mais il est aisé de voir que, malgré cet accroissement, il reste encore insensible; en sorte que les seuls termes sensibles que l'action de la Lune introduit dans l'intégrale $\int P'dt$ et par conséquent dans la valeur de θ sont ceux auxquels nous avons eu égard. Quelques Astronomes ont introduit dans cette valeur une petite inégalité dépendante de la longitude du périgée de l'orbe lunaire; mais on voit par l'analyse précédente que cette inégalité n'a point lieu. Le moyen mouvement du périgée lunaire étant double à peu près du mouvement des nœuds de la Lune, un terme dépendant de l'angle $2\Lambda'+\Gamma'$ pourrait devenir sensible, quoique mul-

tiplié par $e'\gamma'^2$; mais l'analyse précédente nous montre qu'il n'existe point de terme semblable dans l'intégrale $\int P'dt$.

Pour évaluer la fonction $\int \gamma' dt \sin \Lambda'$, nous observerons que, dans tous les changements qu'éprouve la position de l'orbe solaire, l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur son plan reste toujours la même, comme on le verra dans la Théorie de la Lune; or, en supposant ce satellite mû sur le plan même de l'orbe solaire, on a $\gamma' = \gamma$ et $\Lambda' = \Lambda$; on a donc, eu égard aux variations de l'orbe solaire,

$$\int \gamma' dt \sin \Lambda' = -\Sigma \frac{c}{f} \cos(ft + 6).$$

Soit, de plus, c' la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe de la Lune sur celui du Soleil, et $-f't - 6'$ la longitude de son nœud ascendant sur cet orbe, comptée de l'équinoxe mobile du printemps; on aura, en vertu de cette inclinaison,

$$\int \gamma' dt \sin \Lambda' = \frac{c'}{f'} \cos(f't + 6');$$

en réunissant donc ces deux termes, on aura, relativement à la Lune,

$$\int \gamma' dt \sin \Lambda' = \frac{c'}{f'} \cos(f't + 6') - \Sigma \frac{c}{f} \cos(ft + 6),$$

et l'on aura, par les actions réunies du Soleil et de la Lune,

$$\theta = h + \frac{3m}{4n} \frac{2C - A - B}{C} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin\theta \left(\cos 2v + \frac{\lambda m}{m} \cos 2v' \right) \\ -(1 + \lambda) m \cos\theta \, \Sigma \frac{c}{f} \cos(ft + 6) \\ + \frac{\lambda m c'}{f'} \cos\theta \cos(f't + 6') \end{array} \right\}.$$

6. Déterminons présentement la valeur de ψ, et pour cela reprenons la seconde des équations (H) du n° 4, en lui donnant cette forme

$$d\psi \sin\theta = \frac{2C - A - B}{2nC} P dt;$$

on a, par le numéro précédent, relativement au Soleil,

$$\mathrm{Y}^2 - \mathrm{Z}^2 = \frac{r_{\prime}^2}{2}\cos^4\frac{\gamma}{2}(1-\cos 2v) - \frac{r_{\prime}^2}{4}\sin^2\gamma[\cos 2\mathrm{A} - \cos(2v-2\mathrm{A})]$$
$$- \frac{r_{\prime}^2}{2}\sin^2\gamma[1-\cos(2v-2\mathrm{A})] + \frac{r_{\prime}^2}{2}\sin^4\frac{\gamma}{2}[1-\cos(2v-4\mathrm{A})],$$

$$\mathrm{YZ} = \frac{r_{\prime}^2}{4}\sin 2\gamma\cos\mathrm{A} - \frac{r_{\prime}^2}{2}\sin\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos(2v-\mathrm{A})$$
$$+ \frac{r_{\prime}^2}{2}\sin\gamma\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos(2v-3\mathrm{A});$$

on aura donc, par l'analyse du même numéro, en négligeant les carrés de e et de γ et les quantités qui restent insensibles après l'intégration,

$$\mathrm{P}dt = \frac{3m^2}{2}dt\sin\theta\cos\theta - \frac{3m}{4}\sin\theta\cos\theta\, d\sin 2v$$
$$+ \frac{3m^2}{2}\gamma\, dt\cos\mathrm{A}(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

expression dans laquelle il faut substituer pour $\gamma\cos\mathrm{A}$ sa valeur $\Sigma c\cos(ft+6)$.

On trouvera, par la même analyse, que l'on a, relativement à la Lune,

$$\mathrm{P}'dt = \frac{3\lambda m^2 dt}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{3\lambda m^2}{4m'}\sin\theta\cos\theta\, d\sin 2v'$$
$$+ \frac{3\lambda m^2 dt}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Sigma c\cos(ft+6)$$
$$+ \frac{3\lambda m^2 dt}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)c'\cos(f't+6');$$

on aura par conséquent

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3m}{4n}\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda)m\cos\theta - \dfrac{\cos\theta}{2dt}\left(d\sin 2v + \dfrac{\lambda m}{m'}d\sin 2v'\right)\\ + (1+\lambda)m\dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta}\Sigma c\cos(ft+6)\\ + \lambda m\dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta}c'\cos(f't+6')\end{array}\right\}.$$

Pour intégrer cette équation, nous observerons que la valeur de θ n'est

pas constante, et que ses variations séculaires deviennent sensibles par l'intégration dans le premier terme de cette expression de $\frac{d\psi}{dt}$; or la seule partie de la valeur de θ qui puisse acquérir une valeur un peu grande par la suite des siècles est celle-ci

$$-\frac{3m^2}{4n}\,\frac{2C-A-B}{C}\,(1+\lambda)\cos\theta\,\Sigma\frac{c}{f}\cos(ft+\beta);$$

c'est donc lá seule à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard : ainsi, en faisant, pour abréger,

$$\frac{3m^2}{4n}\,\frac{2C-A-B}{C}\,(1+\lambda)\cos h = l,$$

le premier terme de l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$ deviendra, en négligeant les quantités de l'ordre c^2,

$$l + l^2 \operatorname{tang} h\,\Sigma\frac{c}{f}\cos(ft+\beta).$$

Il est inutile d'avoir égard à la variabilité de θ dans les autres termes de cette expression, qui donne, après l'avoir intégrée,

$$\begin{aligned}\psi = lt + \zeta + \Sigma\left[\left(\frac{l}{f}-1\right)\operatorname{tang} h + \cot h\right]\frac{lc}{f}\sin(ft+\beta) - \frac{l}{2m(1+\lambda)}\sin 2v \\ - \frac{l\lambda}{2m'(1+\lambda)}\sin 2v' + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'}\,\frac{\cos^2 h - \sin^2 h}{\sin h\cos h}\,c'\sin(f't+\beta'),\end{aligned}$$

ζ étant une constante arbitraire.

L'expression de θ du numéro précédent peut être mise sous cette forme

$$\begin{aligned}\theta = h - \Sigma\frac{lc}{f}\cos(ft+\beta) + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'}\,c'\cos(f't+\beta') \\ + \frac{l\operatorname{tang} h}{2m(1+\lambda)}\left(\cos 2v + \frac{m}{m'}\lambda\cos 2v'\right).\end{aligned}$$

En réunissant ces valeurs de ψ et de θ avec celle-ci $p = n$, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer à chaque instant les mouvements de la Terre autour de son centre de gravité.

7. Les valeurs de ψ et de θ sont relatives à un plan fixe; pour avoir ces valeurs par rapport à l'écliptique vraie, considérons le triangle sphérique formé par l'écliptique fixe, par l'écliptique vraie et par l'équateur. Il est aisé de voir que la différence des deux arcs interceptés entre l'équateur et le nœud ascendant de l'orbe solaire, dans ce triangle, est à très-peu près égale au produit de $\cot\theta$ par l'inclinaison de l'orbe solaire à l'écliptique fixe et par le sinus de la longitude de son nœud; cette différence est donc égale à $\cot\theta\,\Sigma c\sin(ft+6)$; or, si l'on nomme ψ' la distance de l'intersection de l'écliptique vraie et de l'équateur à l'origine invariable d'où l'on compte l'angle ψ sur le plan fixe, on aura, à très-peu près, $\psi-\psi'$ pour cette différence; on aura donc

$$\psi-\psi'=\cot\theta\,\Sigma c\sin(ft+6),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\psi' = lt + \zeta + \Sigma\left(1+\frac{l}{f}\operatorname{tang}^2 h\right)\frac{l-f}{f}\cot h.c\sin(ft+6)\\ + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'}\frac{\cos^2 h-\sin^2 h}{\sin h\cos h}c'\sin(f't+6') - \frac{l}{2m(1+\lambda)}\sin 2v\\ - \frac{l\lambda}{2m'(1+\lambda)}\sin 2v'.\end{aligned}$$

Si l'on nomme ensuite θ' l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'équateur, on trouvera facilement, en considérant le triangle sphérique précédent, et en observant que $\theta'-\theta$ est fort petit,

$$\theta'-\theta = \Sigma c\cos(ft+6);$$

on aura par conséquent

$$\begin{aligned}\theta' = h + \Sigma\frac{f-l}{f}c\cos(ft+6) + \frac{l\lambda}{(1+\lambda)f'}c'\cos(f't+6')\\ + \frac{l\operatorname{tang} h}{2m(1+\lambda)}\left(\cos 2v + \frac{m}{m'}\lambda\cos 2v'\right).\end{aligned}$$

La partie $\Sigma\frac{f-l}{f}c\cos(ft+6)$ de cette expression donne la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique vraie sur l'équateur. Si la Terre

était sphérique, il n'y aurait point de précession en vertu de l'action du Soleil et de la Lune; on aurait ainsi $l = 0$, et la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique vraie serait $\Sigma c \cos(ft + 6)$. On voit donc que l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre change considérablement les lois de cette variation, qui deviendrait même presque nulle, si le mouvement de précession dû à cette action était très-rapide relativement au mouvement de l'orbe solaire; car ce dernier mouvement dépend, par le n° 5, des angles $(f - l)t$, dans lesquels les coefficients $f - l$ seraient alors très-petits par rapport à l et à f, en sorte que la fonction $\Sigma \frac{f-l}{f} c \cos(ft + 6)$ deviendrait presque insensible. Dans les suppositions les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique est réduite, par l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action; mais cette différence ne se manifeste qu'après deux ou trois siècles.

Pour le faire voir, développons la fonction $\Sigma \frac{f-l}{f} c \cos(ft + 6)$ par rapport aux puissances du temps; elle devient, en négligeant les termes au delà de sa première puissance,

$$\Sigma \frac{f-l}{f} c \cos 6 - t\,\Sigma (f - l) c \sin 6.$$

Le coefficient $f - l$ est, comme on l'a vu, le même pour la Terre supposée sphérique que pour le cas où elle diffère de la sphère; la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique est donc la même pour ces deux cas, dans les temps voisins de l'époque.

La fonction $\Sigma\left(1 + \frac{l}{f} \operatorname{tang}^2 h\right)(l - f) \cot h . c \cos(ft + 6)$ de l'expression de $\frac{d\psi'}{dt}$ donne la diminution de l'année moyenne, en réduisant cette fonction en temps, à raison de la circonférence entière pour une année. La diminution qui aurait lieu par le seul mouvement de l'éclip-

tique, et en faisant abstraction de l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, serait

$$\Sigma(l-f)\cot h.c\cos(ft+6);$$

cette action change donc encore l'étendue de la variation de l'année, et la réduit à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action.

8. Considérons présentement l'influence de cette action sur la durée du jour moyen. Nous observerons d'abord que l'axe instantané de rotation ne s'écarte jamais du troisième axe principal que d'une quantité insensible; on a vu, dans le n° 28 du Livre I, que le sinus de l'angle formé par ces deux axes est égal à $\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$; or il est visible, par ce qui précède, que q et r sont insensibles, et qu'ils n'ont d'influence sensible sur les valeurs de θ et de ψ que par les intégrations; on peut donc toujours confondre l'axe instantané de rotation de la Terre avec son troisième axe principal, et ses pôles de rotation répondent toujours à très-peu près aux mêmes points de sa surface.

Déterminons le mouvement de rotation de la Terre autour de son troisième axe principal. Il est aisé de voir que, p étant égal à $\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$, il exprime ce mouvement. Si dans les équations (G) du n° 4 on suppose $A=B$, ce qui a lieu lorsque la Terre est un sphéroïde de révolution, la première de ces équations donne $dp=0$, et par conséquent p égal à une constante n; mais ces équations n'étant qu'approchées relativement à l'action de l'astre L, nous allons prouver que l'équation $p=n$ a encore lieu, en ayant égard à tous les termes dus à cette action.

Si, comme dans le n° 2, on prend pour le plan des x et des y celui de l'équateur, la première des équations (D) du n° 1 deviendra

$$dp=\frac{dN}{c},$$

ces phénomènes, et il n'est probablement aucun cas possible qui n'ait lieu sur la Terre. Mais, puisque les constantes B et λ seraient les mêmes pour le Soleil et la Lune si les mouvements de ces astres étaient égaux, il est naturel de supposer que leurs différences sont proportionnelles aux différences de ces mouvements; nous adopterons donc cette hypothèse, et nous verrons qu'elle satisfait avec une précision remarquable aux observations. Nous ferons ainsi

$$\lambda = \mathrm{O} - m\mathrm{T},$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}(1 - 2m\mathrm{Q}),$$

O, T, P et Q étant les mêmes pour le Soleil et la Lune. Nous donnerons dans la suite le moyen de déterminer ces constantes dans chaque port par les observations.

19. Voyons maintenant ce qui doit arriver lorsque le Soleil et la Lune, toujours mus dans le plan de l'équateur, sont assujettis à des inégalités dans leurs mouvements et dans leurs distances. Les forces partielles

$$\frac{3\mathrm{L}}{2r^3}\left(\sin^2\theta - \tfrac{2}{3}\right), \quad \text{et} \quad \frac{3\mathrm{L}}{2r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

trouvées dans le n° 16, ne seront plus constantes; mais elles varieront avec une grande lenteur, et la période de leur variation sera d'une année. Si la durée de cette période était infinie, ces forces n'auraient d'autre effet que de changer la figure permanente de la mer, qui parviendrait bientôt à l'état d'équilibre. Mais, quoique cette durée soit finie, on a vu, dans le n° 6, qu'en vertu des résistances que la mer éprouve, on peut la considérer comme étant à chaque instant en équilibre sous l'action de ces forces, et déterminer dans cette hypothèse la hauteur correspondante des marées. On a vu de plus que, quelle que soit la profondeur de la mer, la hauteur des marées due à l'action de ces forces est

$$-\frac{1 + 3\cos 2\theta}{8g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}\frac{\mathrm{L}}{r^3},$$

Si, dans les parties des forces solaires (A) du n° 16 qui sont multipliées par le sinus et le cosinus de l'angle $2nt + 2\varpi - 2\psi$, on substitue, au lieu de r et de ψ, leurs valeurs, chacune de ces parties se développera en sinus et cosinus d'angles de la forme $2nt - 2qt + 2\varepsilon$, en sorte que l'on aura

$$\frac{3L}{2r^3}\sin^2\theta\cos 2(nt + \varpi - \psi) = \sin^2\theta \,.\, \Sigma k\cos 2(nt - qt + \varepsilon),$$

$$\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta\cos 2(nt + \varpi - \psi) = \sin\theta\cos\theta \,.\, \Sigma k\cos 2(nt - qt + \varepsilon),$$

$$\frac{3L}{2r^3}\sin\theta\sin 2(nt + \varpi - \psi) = \sin\theta \,.\, \Sigma k\sin 2(nt - qt + \varepsilon),$$

le signe Σ des intégrales finies servant ici à désigner la somme de tous les termes de la forme $k\cos 2(nt - qt + \varepsilon)$ et $k\sin 2(nt - qt + \varepsilon)$, dans lesquels le premier membre de chacune de ces équations peut se décomposer.

Le plus considérable de ces termes est celui qui dépend de l'angle $2nt - 2mt + 2\varpi$, et qui produit le flux et le reflux de la mer, dans le cas que nous avons examiné ci-dessus, où le Soleil serait mû uniformément dans le plan de l'équateur, en conservant toujours la même distance à la Terre. Les autres termes peuvent être considérés comme le résultat de l'action d'autant d'astres particuliers, mus uniformément dans le plan de l'équateur. C'est de la combinaison des flux et reflux partiels dus à l'action de tous ces astres que se compose le flux et le reflux total dû à l'action du Soleil.

Si l'on nomme l la masse de l'astre fictif dont l'action produit le terme dépendant de l'angle $2nt - 2qt + 2\varepsilon$, et a sa distance au centre de la Terre, on aura

$$\frac{3l}{2a^3} = k, \quad \text{ou} \quad \frac{l}{a^3} = \tfrac{2}{3}k.$$

On a vu dans le numéro précédent que, le Soleil étant supposé mû uniformément dans le plan de l'équateur avec un mouvement angulaire égal à mt, la partie de l'expression de la hauteur de la mer dé-

stantané de rotation ne s'écarte jamais du troisième axe principal que d'une quantité insensible. Soit donc s la vitesse angulaire du troisième Soleil, que nous concevons mû dans le plan de l'équateur, et v sa distance à l'équinoxe du printemps rapporté à l'écliptique fixe; $n - s$ sera la vitesse angulaire du premier axe principal de la Terre relativement à ce Soleil, et l'on aura

$$d\varphi - dv = (n - s)\,dt.$$

Mais on a, par le n° 4,

$$d\varphi = n\,dt + d\psi\cos\theta;$$

on aura donc

$$dv = s\,dt + d\psi\cos\theta.$$

Soit v' la distance angulaire du troisième Soleil à l'équinoxe réel, c'est-à-dire à l'intersection de l'équateur avec l'écliptique vraie. Il est aisé de voir, par le n° 7, que $v - v'$ est égal à $\frac{\psi - \psi'}{\cos\theta}$, et par conséquent égal à $\frac{\Sigma c\sin(ft + 6)}{\sin\theta}$, ce qui donne

$$dv' = s\,dt + d\psi\cos\theta - dt\frac{\Sigma cf\cos(ft + 6)}{\sin\theta}.$$

Soit gt le mouvement sidéral du second Soleil sur l'écliptique vraie; $g + \frac{d\psi'}{dt}$ sera sa vitesse angulaire relativement à l'équinoxe réel; mais on a, par le n° 7,

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \cot\theta.\Sigma cf\cos(ft + 6);$$

cette vitesse est donc égale à

$$g + \frac{d\psi}{dt} - \cot\theta.\Sigma cf\cos(ft + 6);$$

elle doit être égale à $\frac{dv'}{dt}$; on pourra donc, au moyen de cette égalité,

déterminer s, et l'on aura

$$s = g + (1 - \cos\theta)\frac{d\psi}{dt} + \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\Sigma cf\cos(ft + 6).$$

En substituant pour $d\psi$ et θ leurs valeurs précédentes, on aura

$$\begin{aligned} s = g &+ l(1 - \cos h) - \sin h.\Sigma\frac{l^2 c}{f}\cos(ft + 6) \\ &+ (1 - \cos h)\Sigma\left[\left(\frac{l^2}{f} - l\right)\tan h + l\cot h\right] c\cos(ft + 6) \\ &+ \frac{1 - \cos h}{\sin h}\Sigma cf\cos(ft + 6). \end{aligned}$$

Le temps exprimé en jours moyens est égal à $\int s\,dt$; on aura donc, pour l'équation de ce temps,

$$\begin{aligned} &- \sin h.\Sigma\frac{l^2 c}{f^2}\sin(ft + 6) \\ &- (1 - \cos h)\Sigma\left[\left(\frac{l^2}{f^2} - \frac{l}{f}\right)\tan h + \frac{l}{f}\cot h\right] c\sin(ft + 6) \\ &+ \frac{1 - \cos h}{\sin h}\Sigma c\sin(ft + 6). \end{aligned}$$

Cette équation réduite en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour, ne s'élevant qu'à quelques minutes dans une période de plusieurs millions d'années, sa considération est inutile aux Astronomes.

10. L'analyse des numéros précédents suppose la Terre entièrement solide; mais elle est recouverte en grande partie d'un fluide, dont les oscillations peuvent influer sur les mouvements de l'axe terrestre; il importe donc d'examiner cette influence, et de voir si les résultats que nous venons de trouver n'en sont point altérés. Pour cela, il faut déterminer ce que l'action de l'océan sur le sphéroïde qu'il recouvre ajoute aux valeurs de dN, dN' et dN'' du n° 1. On a vu, dans le n° 25 du Livre I, que, P, Q, R étant les forces dont la molécule dm du sphé-

roïde terrestre est animée parallèlement aux axes des x', des y' et des z', et en sens contraire de leur origine, on a

$$\frac{dN}{dt} = \int (Qx' - Py')\,dm,$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int (Rx' - Pz')\,dm,$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int (Ry' - Qz')\,dm.$$

Voyons quelles sont les quantités que l'action de l'océan introduit dans ces expressions. Ce fluide agit sur le sphéroïde terrestre par sa pression et par son attraction; considérons séparément ces deux effets. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que le plan des x' et des y' est le plan même de l'équateur, ainsi que nous l'avons supposé dans le n° 3.

Dans le cas de l'équilibre, la pression et l'attraction de l'océan ne produisent aucun mouvement dans l'axe de rotation de la Terre; il ne faut donc avoir égard qu'à l'action de la couche d'eau qui, par les attractions du Soleil et de la Lune, se dispose sur la surface d'équilibre qui terminerait l'océan sans ces attractions. Représentons par αy l'épaisseur de cette couche, et prenons pour unité de densité celle de la mer, et pour unité de distance le rayon moyen du sphéroïde terrestre; nous aurons ainsi à considérer l'action d'une couche aqueuse dont le rayon intérieur est l'unité, et dont le rayon extérieur est $1 + \alpha y$. Si l'on nomme g la pesanteur, la pression d'une colonne de cette couche sera le produit de $\alpha g y$ par la base de cette colonne; ce sera, par le n° 36 du Livre I, l'excès de la pression dans l'état de mouvement du fluide sur sa pression dans l'état d'équilibre.

Soit R le rayon mené du centre de gravité de la Terre au point de la surface du sphéroïde que cette colonne presse; soit μ le cosinus de l'angle que le rayon R forme avec l'axe de rotation, et ϖ l'angle que le plan mené par cet axe et par R forme avec l'axe des x'. Soit enfin $u = 0$ l'équation de la surface du sphéroïde que recouvre la mer,

u étant fonction des coordonnées x', y', z' qui déterminent la position du point dont il s'agit; on aura

$$x' = \mathrm{R}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi,$$

$$y' = \mathrm{R}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi,$$

$$z' = \mathrm{R}\mu.$$

La base de la petite colonne que nous venons de considérer peut être supposée égale à $\mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi$; la pression de cette colonne est donc $\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi$. Cette pression est perpendiculaire à la surface du sphéroïde; en la décomposant en trois forces parallèles aux axes des x', des y' et des z', et supposées tendre à augmenter ces coordonnées, on aura pour ces forces, par le n° **3** du Livre I,

$$-\frac{\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\frac{\partial u}{\partial x'}, \quad -\frac{\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\frac{\partial u}{\partial y'}, \quad -\frac{\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\frac{\partial u}{\partial z'},$$

f étant égal à $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2}$. L'équation à la surface du sphéroïde est de cette forme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q,$$

q étant une fonction très-petite de x', y', z', dont nous négligerons le carré; on a donc

$$u = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 - 2q,$$

ce qui change les expressions des trois forces précédentes dans celles-ci

$$-\frac{2\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(x' - \frac{\partial q}{\partial x'}\right),$$

$$-\frac{2\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(y' - \frac{\partial q}{\partial y'}\right),$$

$$-\frac{2\alpha g y \mathrm{R}^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(z' - \frac{\partial q}{\partial z'}\right);$$

on aura ainsi, en n'ayant égard qu'à ces forces,

$$\frac{dN}{dt} = \int\int \frac{2\alpha g y R^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(x'\frac{\partial q}{\partial y'} - y'\frac{\partial q}{\partial x'}\right),$$
$$\frac{dN'}{dt} = \int\int \frac{2\alpha g y R^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(x'\frac{\partial q}{\partial z'} - z'\frac{\partial q}{\partial x'}\right),$$
$$\frac{dN''}{dt} = \int\int \frac{2\alpha g y R^2 d\mu\, d\varpi}{f}\left(y'\frac{\partial q}{\partial z'} - z'\frac{\partial q}{\partial y'}\right).$$

Rapportons les différences partielles $\frac{\partial q}{\partial x'}$, $\frac{\partial q}{\partial y'}$ et $\frac{\partial q}{\partial z'}$ aux variables R, μ et ϖ. Pour cela, nous observerons que l'on a

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad \tang\varpi = \frac{y'}{x'}, \qquad \mu = \frac{z'}{R},$$

d'où il est facile de conclure

$$\frac{\partial q}{\partial x'} = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\frac{\partial q}{\partial R} - \frac{\sin\varpi}{R\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial q}{\partial\varpi} - \frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi}{R}\frac{\partial q}{\partial\mu},$$
$$\frac{\partial q}{\partial y'} = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi\frac{\partial q}{\partial R} + \frac{\cos\varpi}{R\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial q}{\partial\varpi} - \frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi}{R}\frac{\partial q}{\partial\mu},$$
$$\frac{\partial q}{\partial z'} = \mu\frac{\partial q}{\partial R} + \frac{1-\mu^2}{R}\frac{\partial q}{\partial\mu};$$

on aura ainsi, en observant que, dans les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, on peut, en négligeant le carré de q, supposer $R = 1$ et $f = 2$,

$$\frac{dN}{dt} = \int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi\frac{\partial q}{\partial\varpi},$$
$$\frac{dN'}{dt} = \int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi\left(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\frac{\partial q}{\partial\mu} + \frac{\mu\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial q}{\partial\varpi}\right),$$
$$\frac{dN''}{dt} = \int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi\left(\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi\frac{\partial q}{\partial\mu} - \frac{\mu\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial q}{\partial\varpi}\right).$$

Déterminons présentement les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à l'attraction de la couche aqueuse sur le sphéroïde terrestre. Il est clair

que, si ce sphéroïde et l'océan qui le recouvre formaient une masse solide, il n'y aurait aucun mouvement dans cette masse en vertu de l'attraction de toutes ses parties; l'effet de l'attraction de la couche aqueuse sur l'océan, ajouté à l'effet de son attraction sur le sphéroïde terrestre, est donc égal et d'un signe contraire à l'effet de l'attraction de la Terre entière sur la couche aqueuse; d'où il suit que l'effet de l'attraction de cette couche sur le sphéroïde terrestre est égal à la somme des effets de l'attraction de la Terre entière sur la couche, et de l'attraction de la couche sur l'océan, cette somme étant prise avec un signe contraire.

La résultante de l'attraction de la Terre entière sur la petite colonne $\alpha y\, d\mu\, d\varpi$ de la couche aqueuse et de la force centrifuge est perpendiculaire à la surface d'équilibre de la mer; on aura donc l'attraction de la Terre entière sur cette colonne, en la concevant animée de cette résultante et de la force centrifuge prise avec un signe contraire. La première de ces deux forces est la pesanteur g, qui doit être multipliée par la masse $\alpha y\, d\mu\, d\varpi$ de la molécule; en supposant donc que l'équation de la surface d'équilibre de la mer soit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q',$$

on aura, par ce qui précède, les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à cette force, en changeant, dans les expressions précédentes de ces quantités, q en q'. Il faut de plus, comme on vient de le dire, les prendre avec un signe contraire; en les réunissant ainsi aux expressions précédentes, et observant que $q' - q$ exprime la profondeur de la mer, que nous supposons très-petite et que nous représenterons par γ, on aura

$$\frac{dN}{dt} = -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi},$$

$$\frac{dN'}{dt} = -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} \right),$$

$$\frac{dN''}{\partial t} = -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} \right).$$

Il faut maintenant considérer l'effet de la force centrifuge prise avec un signe contraire, et le retrancher de ces valeurs, ce qui revient à leur ajouter l'effet de la force centrifuge. Si l'on désigne par n la vitesse de rotation de la Terre, la force centrifuge de la petite colonne $\alpha y\, d\mu\, d\varpi$ sera $n^2\sqrt{1-\mu^2}$; en la multipliant par la masse de la colonne, on aura $\alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}$ pour la force entière. Cette force est dirigée suivant le rayon du parallèle terrestre; en la décomposant en deux, l'une parallèle aux x' et l'autre parallèle aux y', on aura $\alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ pour la première, et $\alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$ pour la seconde; on aura donc, pour les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à la force centrifuge,

$$\frac{dN}{dt} = 0,$$
$$\frac{dN'}{dt} = -\int\!\!\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi.\, \mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi,$$
$$\frac{dN''}{dt} = -\int\!\!\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi.\, \mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi.$$

Il nous reste à déterminer l'effet de l'attraction de la couche aqueuse sur l'océan. Pour cela, représentons par αU la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances respectives à une molécule de l'océan, déterminée soit par les quantités R, μ et ϖ, soit par les coordonnées x', y', z'; $\alpha\frac{\partial U}{\partial x'}$, $\alpha\frac{\partial U}{\partial y'}$ et $\alpha\frac{\partial U}{\partial z'}$ seront les attractions de la couche sur cette molécule parallèlement à ces coordonnées, ces attractions tendant à les augmenter. La masse de la molécule est $R^2 dR\, d\mu\, d\varpi$; on aura donc, pour les parties de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$ relatives à l'attraction de la couche aqueuse sur l'océan,

$$\int\!\!\int\!\!\int \alpha R^2 dR\, d\mu\, d\varpi\left(x'\frac{\partial U}{\partial y'} - y'\frac{\partial U}{\partial x'}\right),$$
$$\int\!\!\int\!\!\int \alpha R^2 dR\, d\mu\, d\varpi\left(x'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial x'}\right),$$
$$\int\!\!\int\!\!\int \alpha R^2 dR\, d\mu\, d\varpi\left(y'\frac{\partial U}{\partial z'} - z'\frac{\partial U}{\partial y'}\right).$$

Pour intégrer ces fonctions relativement à R, nous observerons que, la profondeur de la mer étant supposée très-petite, on peut supposer $R = 1$ et $\int R^2 dR = \gamma$. Si, de plus, on change les différences partielles $\frac{\partial U}{\partial x'}$, $\frac{\partial U}{\partial y'}$ et $\frac{\partial U}{\partial z'}$ en d'autres relatives aux variables R, ϖ et μ, les fonctions précédentes deviendront, en les prenant avec un signe contraire,

$$-\int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial U}{\partial \varpi},$$

$$-\int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \varpi} \right),$$

$$-\int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \varpi} \right).$$

Si l'on réunit ces valeurs aux expressions partielles de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ trouvées ci-dessus, on aura, pour les expressions entières de ces quantités relatives à l'attraction et à la pression de l'océan sur le sphéroïde terrestre,

$$\frac{dN}{dt} = -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} - \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial U}{\partial \varpi},$$

$$\begin{aligned} \frac{dN'}{dt} = & -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} \right) \\ & -\int\int \alpha\, \gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \varpi} \right) \\ & -\int\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN''}{dt} = & -\int\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi} \right) \\ & -\int\int \alpha\, \gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial U}{\partial \varpi} \right) \\ & -\int\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi. \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes doivent être prises depuis $\mu = -1$ jusqu $\mu = 1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à quatre angles droits. En in

on aura donc

$$\int\!\!\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} - \frac{\mu\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}\right)$$
$$= -\int\!\!\int \alpha g \gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\mu\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial y}{\partial \varpi}\right).$$

On trouvera pareillement

$$\int\!\!\int \alpha g y\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} + \frac{\mu\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}\right)$$
$$= -\int\!\!\int \alpha g \gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\mu\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial y}{\partial \varpi}\right);$$

les expressions précédentes de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ deviendront ainsi

$$\frac{dN}{dt} = \int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(g\frac{\partial y}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi}\right),$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left[\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi\left(g\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu}\right) + \frac{\mu\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(g\frac{\partial y}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi}\right)\right]$$
$$- \int\!\!\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi.\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi,$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left[\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi\left(g\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu}\right) - \frac{\mu\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(g\frac{\partial y}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi}\right)\right]$$
$$- \int\!\!\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi.\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi.$$

11. Déterminons maintenant l'influence de ces quantités sur les mouvements du sphéroïde terrestre autour de son centre de gravité. Pour cela, reprenons les équations (D′) du n° **1**. Si l'on néglige les quantités très-petites $\frac{B-A}{C}qr\,dt$, $\frac{C-B}{A}rp\,dt$ et $\frac{A-C}{B}pq\,dt$; si, de plus, on observe qu'ayant pris pour les axes des x', des y' et des z' les axes principaux, on a $\varphi = 0$, $\theta = 0$, on aura

$$dp = \frac{dN}{C}, \quad dq = \frac{dN''}{A}, \quad dr = -\frac{dN'}{B}.$$

On voit d'abord que les termes dépendants de très-petits angles, que

contient dN, peuvent, par l'intégration, en produire de très-grands dans la valeur de p; il est donc nécessaire d'avoir égard à ces termes.

On a vu, dans le n° 4, que

$$\frac{d\theta}{dt} = r\sin\varphi - q\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = r\cos\varphi + q\sin\varphi;$$

en faisant donc

$$\frac{d\theta}{dt} = x'', \quad \frac{d\psi\sin\theta}{dt} = y'',$$

et observant que $d\varphi$ est à très-peu près égal à $n\,dt$, on aura

$$dx'' = dr\sin\varphi - dq\cos\varphi + ny''dt,$$

$$dy'' = dr\cos\varphi + dq\sin\varphi - nx''dt.$$

Si l'on substitue pour dq et dr leurs valeurs précédentes, dans lesquelles on peut changer A et B en C, on aura

$$dx'' = -\frac{dN'}{C}\sin\varphi - \frac{dN''}{C}\cos\varphi + ny''dt,$$

$$dy'' = -\frac{dN'}{C}\cos\varphi + \frac{dN''}{C}\sin\varphi - nx''dt.$$

Soit $H\,dt\cos(it+\varepsilon)$ un terme quelconque de $\frac{dN'\sin\varphi + dN''\cos\varphi}{C}$, et $H'dt\sin(it+\varepsilon)$ le terme correspondant de $\frac{dN'\cos\varphi - dN''\sin\varphi}{C}$; les termes correspondants de x'' et de y'' seront

$$x'' = \frac{nH' - iH}{i^2 - n^2}\sin(it+\varepsilon), \quad y'' = \frac{iH' - nH}{i^2 - n^2}\cos(it+\varepsilon).$$

Les termes dépendants de très-petits angles, ou dans lesquels i est fort petit, sont encore peu sensibles dans les valeurs de x'' et de y''; mais l'intégration les rend très-sensibles dans les valeurs de θ et de ψ, et l'on a vu, dans le n° 4, que la précession et la nutation dépendent de

termes semblables; il est donc essentiel d'y avoir égard. Ces termes sont produits par ceux de dN' et de dN'' qui dépendent d'angles très-peu différents de nt; car, en les multipliant par $\sin\varphi$ et par $\cos\varphi$, il en résulte des termes dépendants de très-petits angles; ainsi l'on doit faire une attention particulière à ces termes.

Les termes dans lesquels i est très-peu différent de n deviennent fort grands dans les valeurs de x'' et de y'', parce que le diviseur $i^2 - n^2$ est alors très-petit. Ces termes résultent de ceux de dN' et de dN'' qui renferment de très-petits angles, et auxquels il est nécessaire, pour cela, d'avoir égard. Ils peuvent encore être produits par les termes de dN' et de dN'' dépendants d'angles très-peu différents de $2nt$; en effet, si, par exemple, dN' renferme le terme $L\,dt\sin(2nt + vt + \varepsilon)$, v étant très-petit, il en résultera, dans la fonction $\frac{dN'\sin\varphi + dN''\cos\varphi}{C}$, le terme $\frac{L}{2C}\,dt\cos(2nt - \varphi + vt + \varepsilon)$, et dans la fonction $\frac{dN'\cos\varphi - dN''\sin\varphi}{C}$, le terme $\frac{L}{2C}\,dt\sin(2nt - \varphi + vt + \varepsilon)$. Mais, dans ce cas, H' étant égal à H, les expressions correspondantes de y'' et de x'' perdent leur très-petit diviseur $i - n$, et par conséquent sont insensibles. On verrait de même qu'un terme de dN'' de la forme $L\,dt\cos(2nt + vt + \varepsilon)$ ne produirait dans x'' et y'' que des quantités insensibles; il ne faut donc avoir égard, dans les valeurs de dN, dN' et dN'', qu'aux termes dépendants de très-petits angles ou d'angles très-peu différents de nt.

Pour analyser ces différents termes, il est nécessaire de rappeler les équations différentielles du mouvement de l'océan. Considérons une molécule de sa surface, déterminée, dans l'état d'équilibre, par les coordonnées μ et ϖ; concevons que, dans l'état de mouvement, elle soit élevée de la quantité αy au-dessus de la surface d'équilibre, que sa latitude soit diminuée de la quantité αu, et que l'angle ϖ soit augmenté de αv. Nommons encore υ la déclinaison de l'astre L, Π son ascension droite, et $r_{,}$ sa distance au centre de gravité de la Terre. Soit

$$\alpha f = \frac{3L}{2r_{,}^3}\left[\cos\theta\sin\upsilon + \sin\theta\cos\upsilon\cos(\Pi - \varphi - \varpi)\right]^2;$$

on aura, par les nos 3 et 4 du Livre IV, les trois équations suivantes

$$(I)\quad \begin{cases} y = \dfrac{\partial . \gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{\partial\mu} - \dfrac{\partial . \gamma v}{\partial\varpi}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\dfrac{\partial v}{\partial t}\mu\sqrt{1-\mu^2} = \left(g\dfrac{\partial y}{\partial\mu} - \dfrac{\partial U}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f}{\partial\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\dfrac{g\dfrac{\partial y}{\partial\varpi} - \dfrac{\partial U}{\partial\varpi} - \dfrac{\partial f}{\partial\varpi}}{1-\mu^2}. \end{cases}$$

Si l'on ne considère que les angles croissant avec une extrême lenteur ou indépendants de φ, il est visible que la partie de f relative à ces angles est indépendante de ϖ; les parties de y et de U relatives aux mêmes angles seront donc elles-mêmes indépendantes de ϖ, en sorte qu'en ne considérant que ces termes, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial\varpi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial\varpi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial\varpi} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dN}{dt} = 0,$$

$$\frac{dN'}{dt}\sin\varphi + \frac{dN''}{dt}\cos\varphi = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}\sin(\varphi+\varpi)\left(g\frac{\partial y}{\partial\mu} - \frac{\partial U}{\partial\mu}\right),$$

$$\frac{dN'}{dt}\cos\varphi - \frac{dN''}{dt}\sin\varphi = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}\cos(\varphi+\varpi)\left(g\frac{\partial y}{\partial\mu} - \frac{\partial U}{\partial\mu}\right).$$

On a vu, dans le n° 6 du Livre IV, que, relativement aux termes croissant avec une extrême lenteur, on peut supposer, à très-peu près,

$$0 = g\frac{\partial y}{\partial\mu} - \frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu}.$$

Cette équation est d'autant plus exacte que ces termes varient avec plus de lenteur, et qu'ils ont, par conséquent, plus d'influence sur les mouvements de l'axe de la Terre; on a donc, relativement à ces

termes,

$$\frac{dN' \sin\varphi + dN'' \cos\varphi}{dt} = \int\int \alpha\gamma \, d\mu \, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu},$$

$$\frac{dN' \cos\varphi - dN'' \sin\varphi}{dt} = \int\int \alpha\gamma \, d\mu \, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Considérons présentement les parties de $\frac{dN'}{dt}$ et de $\frac{dN''}{dt}$ qui dépendent d'angles très-peu différents de nt. On a

$$\begin{aligned}\frac{dN' \sin\varphi + dN'' \cos\varphi}{dt} &= \int\int \alpha\gamma \, d\mu \, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial r}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu}\right) \\ &- \int\int \alpha\gamma \, d\mu \, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi + \varpi) \left(g \frac{\partial r}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi}\right) \\ &- \int\int \alpha n^2 y \, d\mu \, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi).\end{aligned}$$

La première des équations (I) donne

$$\begin{aligned}&\int\int \alpha n^2 y \, d\mu \, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \\ &= \int\int \alpha n^2 \, d\mu \, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \left(\frac{\partial . \gamma u \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} - \frac{\partial . \gamma v}{\partial \varpi}\right).\end{aligned}$$

En intégrant depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, on a

$$\int \mu \, d\mu \sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial . \gamma u \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} = -\int \gamma u \, d\mu (1 - 2\mu^2);$$

on a pareillement, en intégrant depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à quatre angles droits,

$$\int d\varpi \sin(\varphi + \varpi) \frac{\partial . \gamma v}{\partial \varpi} = -\int \gamma v \, d\varpi \cos(\varphi + \varpi);$$

partant,

$$\begin{aligned}\int\int \alpha n^2 y \, d\mu \, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) &= -\int\int \alpha n^2 \gamma u \, d\mu \, d\varpi (1 - 2\mu^2) \sin(\varphi + \varpi) \\ &+ \int\int \alpha n^2 \gamma v \, d\mu \, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi).\end{aligned}$$

On peut supposer γu développé dans une suite de termes de la forme $H \cos(it + s\varpi + \varepsilon)$, H étant fonction de μ seul, et s étant un nombre

entier positif ou négatif, ou zéro, les nombres fractionnaires étant exclus, parce que γu est le même lorsque $\varpi = 0$ et lorsque ϖ est égal à quatre angles droits. Pareillement, γv peut être supposé développé dans une suite correspondante de termes de la forme $\mathrm{M}\sin(it + s\varpi + \varepsilon)$, M étant fonction de μ seul. Soient H′ et M′ les valeurs de H et de M relatives au même arc it et qui correspondent à $s = 1$. Le coefficient i étant supposé très-peu différent de n, l'angle $it - \varphi + \varepsilon$ croît avec une lenteur extrême; en ne conservant donc que les termes dépendants de cet angle, on voit que les termes de γu et de γv dans lesquels s est différent de l'unité renferment l'angle ϖ dans les intégrales précédentes, et disparaissent ainsi par l'intégration relative à ϖ; on a donc

$$\begin{aligned}&\int\!\!\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi . \mu\sqrt{1-\mu^2}\sin(\varphi+\varpi)\\ &\quad = \alpha n^2\pi\sin(it+\varepsilon-\varphi)\int d\mu\left[(1-2\mu^2)\,\mathrm{H}' + \mu\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{M}'\right].\end{aligned}$$

Si l'on multiplie la seconde des équations (I) par $\alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\sin(\varphi+\varpi)$, et qu'on l'ajoute à la troisième multipliée par

$$\alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi . \mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(\varphi+\varpi),$$

on aura

$$(\mathrm{O})\quad\left\{\begin{aligned}&\int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sin(\varphi+\varpi) + 2n\mu^2\frac{\partial u}{\partial t}\cos(\varphi+\varpi)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(\varphi+\varpi) - 2n\frac{\partial v}{\partial t}\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin(\varphi+\varpi)\right]\\ &= \int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\sqrt{1-\mu^2}\sin(\varphi+\varpi)\left(g\frac{\partial y}{\partial\mu} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\mu} - \frac{\partial f}{\partial\mu}\right)\\ &\quad - \int\!\!\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\cos(\varphi+\varpi)\left(g\frac{\partial y}{\partial\varpi} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\varpi} - \frac{\partial f}{\partial\varpi}\right).\end{aligned}\right.$$

En substituant pour γu et pour γv l'ensemble de tous leurs termes relatifs à l'angle it, et observant que i est supposé très-peu différer de n, le premier membre de cette équation deviendra

$$\alpha n^2\pi\sin(it+\varepsilon-\varphi)\int d\mu\left[(1-2\mu^2)\,\mathrm{H}' + \mu\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{M}'\right];$$

on aura donc, en n'ayant égard qu'aux termes dans lesquels i est à

45.

très-peu près égal à n,

$$\int\int \alpha n^2 y\, d\mu\, d\varpi . \mu \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi+\varpi)$$
$$= \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi+\varpi) \left(g \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \right)$$
$$- \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi+\varpi) \left(g \frac{\partial y}{\partial \varpi} - \frac{\partial U}{\partial \varpi} - \frac{\partial f}{\partial \varpi} \right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dN' \sin\varphi + dN'' \cos\varphi}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi+\varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu}$$
$$- \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi+\varpi) \frac{\partial f}{\partial \varpi}.$$

On trouvera de la même manière

$$\frac{dN' \cos\varphi - dN'' \sin\varphi}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi+\varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu}$$
$$+ \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \sin(\varphi+\varpi) \frac{\partial f}{\partial \varpi}.$$

Ces deux équations ont donc lieu lorsque l'on n'a égard qu'aux angles croissant avec beaucoup de lenteur, et l'on a vu précédemment que le premier terme du second membre de chacune d'elles renferme encore tout ce qui se rapporte aux angles très-peu différents de nt; en sorte qu'elles embrassent tout ce qui a rapport à ces deux espèces d'angles, les seules qui peuvent influer sensiblement sur les mouvements de la Terre autour de son centre de gravité. En réunissant ces équations à l'équation $\frac{dN}{dt} = 0$, on aura ce qui est nécessaire pour déterminer l'influence de la mer sur ces mouvements.

J'observe maintenant que ces diverses équations sont les mêmes que si la mer formait une masse solide avec la Terre. Pour le faire voir, déterminons les valeurs de dN, dN', dN'' relatives à la mer, dans cette hypothèse. La valeur de V du n° 3 est égale à très-peu près à $\frac{L}{r_{,}} + R^2 \alpha f - \frac{LR^2}{2 r_{,}^3}$, ce qui donne, par le même numéro, en substituant

$R^2 dR\, d\mu\, d\varpi$ pour dm,

$$\frac{dN}{dt} = \int\int\int \alpha R^4\, dR\, d\mu\, d\varpi \left(x' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial x'}\right).$$

La profondeur de la mer étant supposée très-petite, et le rayon R étant à très-peu près égal à l'unité, on a, relativement à la mer,

$$\int R^4\, dR = \gamma,$$

et par conséquent

$$\frac{dN}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(x' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial x'}\right).$$

On trouvera de la même manière

$$\frac{dN'}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(x' \frac{\partial f}{\partial z'} - z' \frac{\partial f}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(y' \frac{\partial f}{\partial z'} - z' \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

En transformant, par le n° 10, les différences partielles en d'autres relatives aux variables R, μ et ϖ, on aura

$$\frac{dN}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\partial f}{\partial \varpi},$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \cos\varpi \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\mu \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial f}{\partial \varpi}\right),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin\varpi \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{\mu \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial f}{\partial \varpi}\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{dN' \sin\varphi + dN'' \cos\varphi}{dt} &= \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \sin(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ &\quad - \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cos(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \varpi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dN' \cos\varphi - dN'' \sin\varphi}{dt} &= \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \sqrt{1-\mu^2} \cos(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ &\quad + \int\int \alpha\gamma\, d\mu\, d\varpi \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \sin(\varphi + \varpi) \frac{\partial f}{\partial \varpi},\end{aligned}$$

et, si l'on n'a égard qu'aux termes croissant avec une extrême lenteur, $\frac{dN}{dt} = 0$. Ces équations sont les mêmes que nous avons trouvées ci-dessus, d'où résulte ce théorème remarquable, savoir, que *les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec le sphéroïde qu'elle recouvre.*

Il existe cependant un cas mathématiquement possible dans lequel ce théorème cesse d'avoir lieu : c'est le cas où le noyau terrestre recouvert par l'océan serait formé de couches sphériques. Il est clair qu'alors il n'y aurait aucun mouvement dans l'axe de rotation du noyau en vertu des attractions du Soleil et de la Lune et de l'attraction et de la pression de la mer, puisque la résultante de toutes ces forces passerait par le centre du noyau. Voyons ce qui empêche l'analyse précédente de s'étendre à ce cas.

Les parties des expressions de αy, αu et αv qui influent sur les mouvements de l'axe terrestre sont celles qui dépendent des sinus et cosinus d'angles de la forme $it + \varpi$, dans lesquels i est très-peu différent de n, et l'on a vu, dans le n° 8 du Livre IV, que ces parties sont relatives aux oscillations de la seconde espèce. Ces oscillations peuvent être déterminées dans ce cas par le numéro cité; i étant très-peu différent de n, les expressions de y, u et v, relatives à l'angle $it + \varpi$, sont de la forme

$$y = \frac{2lqk\mu\sqrt{1-\mu^2}}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}\cos(it + \varpi),$$

$$u = \frac{-k}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}\cos(it + \varpi),$$

$$v = \frac{k}{2lgq\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}\,\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\sin(it + \varpi).$$

La profondeur de la mer est $l(1 - q\mu^2)$; or on a, par le n° 34 du Livre III, pour la condition de l'équilibre,

$$lq = \frac{5n^2\rho}{(10\rho - 6)g},$$

ce qui rend infinies les expressions précédentes de y, u et v; mais, comme elles ne deviennent infinies que par la supposition de $i - n = 0$, il en résulte qu'alors y, u et v sont de l'ordre $\frac{1}{i-n}$. Ainsi l'on ne peut plus supposer dans l'équation (O), comme nous l'avons fait, $i = n$, en différentiant u et v par rapport au temps t. Il faut, dans ces différentielles, avoir égard au facteur $i - n$ qui, multipliant les parties de u et de v divisées par $i - n$, donne des produits indépendants de $i - n$. Ces produits rendent nulles les parties de dN' et de dN'' relatives à l'attraction et à la pression de la mer sur le sphéroïde terrestre.

Nous observerons ici que, dans le cas précédent, les oscillations de la mer dépendantes de l'angle $it + \varpi$ sont très-grandes lorsque i est très-peu différent de n, et c'est ce qui a lieu par rapport aux termes dépendants du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire, $(i - n)t$ exprimant alors ce mouvement; mais une très-légère résistance de la part du sphéroïde terrestre suffit pour diminuer considérablement ces oscillations. La mer, en vertu de cette résistance, agit horizontalement sur le sphéroïde, et par cette action elle influe sur les mouvements de son axe. On verra, dans le numéro suivant, que, dans ce cas, qui est celui de la nature, le théorème précédent subsiste.

12. L'analyse précédente, quoique très-générale, suppose encore que la mer recouvre en entier le sphéroïde terrestre, que sa profondeur est régulière, et qu'elle n'éprouve point de résistance de la part du sphéroïde qu'elle recouvre. Ces suppositions n'ayant pas lieu dans la nature, on peut douter que le théorème précédent s'applique exactement à la mer. Comme il est très-important dans la théorie des mouvements de la Terre, en voici une démonstration générale, quelles que soient les irrégularités de la figure et de la profondeur de la mer et les résistances qu'elle éprouve. Pour cela, je vais rappeler le principe de la conservation des aires, qui a été démontré dans le Chapitre V du Livre I :

Si l'on projette sur un plan fixe chaque molécule d'un système de corps qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres; si de plus

on mène, de ces projections à un point fixe pris sur le plan, des lignes que nous nommerons rayons vecteurs; *la somme des produits de chaque molécule par l'aire que décrit son rayon vecteur est proportionnelle au temps, en sorte que, si l'on nomme* A *cette somme, et t le temps, on aura* $A = ht$, *h étant un coefficient constant.*

Ce principe a, dans la question présente, le grand avantage d'être également vrai dans le cas où le système éprouve des changements brusques, comme cela a lieu pour la mer, dont les oscillations sont brusquement altérées par les frottements et par la résistance des rivages.

Si le système est soumis à l'action de forces étrangères, A ne sera plus proportionnel au temps t, et par conséquent l'élément dt du temps étant supposé constant, la valeur de dA ne sera plus constante. Pour déterminer sa variation, on considérera toutes les molécules du système comme étant en repos et isolées; on fera ensuite une somme de tous les produits de chaque molécule par l'aire que décrirait son rayon vecteur dans l'instant dt, en vertu des forces étrangères qui la sollicitent, et cette somme sera égale à d^2A; car il résulte du principe que nous venons d'exposer que la réaction des différents corps du système ne doit rien changer à cette valeur de d^2A.

Concevons, cela posé, une masse en partie fluide, et qui tourne autour d'un axe quelconque; supposons qu'elle vienne à être sollicitée par des forces attractives très-petites de l'ordre α, et qui laissent en repos son centre de gravité. Si l'on fait passer par ce centre un plan fixe, que nous prendrons pour plan de projection, et que l'on fasse partir de ce même point les rayons vecteurs des différentes molécules, la somme des produits de chaque molécule par l'aire qu'aura décrite son rayon vecteur sera, aux quantités près de l'ordre α^2, la même que si la masse eût été entièrement solide. Il suffit, pour le faire voir, de prouver que la valeur de d^2A sera la même dans la supposition de la masse en partie fluide et dans celle de la masse entièrement solide; or, si l'on considère qu'après un temps quelconque la figure de la masse et

la manière dont elle se présente à l'action des forces étrangères ne peuvent différer, dans ces deux hypothèses, que de quantités de l'ordre α; si l'on observe d'ailleurs que ces forces ne sont elles-mêmes que de l'ordre α, il est aisé d'en conclure que la différence des valeurs de d^2A, dans ces mêmes hypothèses, ne peut être que de l'ordre α^2, et qu'ainsi, en négligeant les quantités de cet ordre, on peut supposer les valeurs correspondantes de $\frac{dA}{dt}$ égales entre elles dans ces deux hypothèses.

Imaginons présentement que la masse dont nous venons de parler soit la Terre elle-même, que nous regarderons d'abord comme un sphéroïde de révolution très-peu différent d'une sphère, et recouvert d'un fluide de peu de profondeur. L'action du Soleil et de la Lune excitera des oscillations dans le fluide et des mouvements dans le sphéroïde; mais ces oscillations et ces mouvements doivent, par ce qui précède, être combinés de manière qu'après un temps quelconque la valeur de $\frac{dA}{dt}$ soit la même que si la Terre eût été entièrement solide. Cherchons d'abord cette valeur, dans cette dernière supposition.

Soit, à l'origine du mouvement, θ l'inclinaison de l'équateur à un plan fixe, que nous supposerons être celui de l'écliptique à une époque donnée; ψ l'angle que forme l'intersection de ce plan et de l'équateur avec une droite invariable menée sur le plan de cette écliptique par le centre de gravité de la Terre; soit, de plus, nt le mouvement de rotation de cette planète. Il est clair que tous les changements qui surviennent dans le mouvement du système, après le temps t, dépendent des variations de θ, ψ et n. Supposons qu'après ce temps, θ se change en $\theta + \alpha\delta\theta$, ψ en $\psi + \alpha\delta\psi$, et n en $n + \alpha\delta n$. On a vu précédemment que les seuls termes auxquels il soit nécessaire d'avoir égard sont ceux qui croissent proportionnellement au temps, et ceux qui, étant périodiques, sont multipliés par des sinus et des cosinus d'angles croissant très-lentement, et divisés par les coefficients du temps t dans ces angles; on peut donc, en n'ayant égard qu'à ces termes, supposer θ, ψ et n constants, en différentiant la fonction A.

Concevons maintenant que le plan fixe sur lequel on projette les

mouvements des molécules de la Terre passe par son centre de gravité, supposé immobile, et forme l'angle γ avec l'écliptique fixe dont nous venons de parler, et que l'intersection de ces deux plans forme l'angle 6 avec la droite invariable d'où nous faisons commencer l'angle ψ; on aura, à l'origine,

$$\frac{dA}{dt} = M,$$

M étant fonction de θ, ψ, n, et des quantités γ et 6 qui déterminent la position du plan de projection. Après un temps quelconque t, on aura $\frac{dA}{dt}$ en changeant, dans M, θ, ψ et n en $\theta + \alpha\delta\theta$, $\psi + \alpha\delta\psi$ et $n + \alpha\delta n$; en désignant donc par $\alpha\delta\frac{dA}{dt}$ la variation de $\frac{dA}{dt}$ après ce temps, on aura, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\alpha\delta\frac{dA}{dt} = \alpha\delta\theta\frac{\partial M}{\partial\theta} + \alpha\delta\psi\frac{\partial M}{\partial\psi} + \alpha\delta n\frac{\partial M}{\partial n}.$$

Nommons C la somme des produits de chaque molécule de la Terre par le carré de sa distance à l'axe de rotation, et V l'inclinaison du plan de projection sur l'équateur terrestre; il est aisé de voir que l'on aura $M = \frac{1}{2}nC\cos V$; or on a

$$\cos V = \cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos(6 - \psi);$$

on aura ainsi

$$(p)\left\{\begin{aligned} \alpha\delta\frac{dA}{dt} = {} & \tfrac{1}{2}\alpha nC\left\{\delta\theta[\sin\gamma\cos\theta\cos(6-\psi) - \cos\gamma\sin\theta] + \delta\psi\sin\gamma\sin\theta\sin(6-\psi)\right\} \\ & + \tfrac{1}{2}\alpha C\delta n[\cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos(6-\psi)], \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle on peut, sans erreur sensible, déterminer C comme si la Terre était une sphère. Cherchons présentement l'expression de la même quantité dans le cas où la Terre est un sphéroïde recouvert d'un fluide de peu de profondeur.

Soient $\delta\theta'$, $\delta\psi'$ et $\delta n'$ les variations de θ, ψ et n relativement au sphéroïde, en ne conservant dans ces variations que les termes ou proportionnels au temps, ou multipliés par des sinus ou des cosinus d'angles

croissant très-lentement, et divisés par les coefficients du temps dans ces angles. Il est clair, par ce qui précède, qu'il en résulte, dans la valeur de $\frac{dA}{dt}$, une variation à très-peu près égale à

$$\tfrac{1}{2}\alpha n C\left\{\delta\theta'[\sin\gamma\cos\theta\cos(6-\psi)-\cos\gamma\sin\theta]+\delta\psi'\sin\gamma\sin\theta\sin(6-\psi)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha C\,\delta n'[\cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta\cos(6-\psi)],$$

le peu de profondeur du fluide permettant de regarder ici C comme représentant encore le produit de chaque molécule de la Terre par le carré de sa distance à l'axe de rotation. Pour avoir la variation entière de $\frac{dA}{dt}$, il faut ajouter à la variation précédente celle qui résulte du mouvement du fluide, et que nous désignerons par $\alpha\delta L$; or on a vu que la variation entière de $\frac{dA}{dt}$ est égale à celle que donne l'équation (p), et qui aurait lieu si le fluide qui recouvre la Terre formait une masse solide avec elle; on aura donc, en égalant ces deux variations,

$$(q)\quad \begin{cases} o=\alpha n C\left\{(\delta\theta'-\delta\theta)[\sin\gamma\cos\theta\cos(6-\psi)-\cos\gamma\sin\theta]+(\delta\psi'-\delta\psi)\sin\gamma\sin\theta\sin(6-\psi)\right\} \\ \quad +\alpha C(\delta n'-\delta n)[\cos\gamma\cos\theta+\sin\gamma\sin\theta\cos(6-\psi)]+2\alpha\delta L. \end{cases}$$

Les seuls termes de l'expression de $\alpha\delta L$ auxquels il faut avoir égard sont ceux qui sont proportionnels au temps, ou qui, renfermant les sinus ou cosinus d'angles croissant avec beaucoup de lenteur, sont divisés par les coefficients du temps dans ces angles. On peut, dans le calcul de ces termes, n'avoir point égard aux variations du mouvement du sphéroïde terrestre, parce que l'influence de ces variations sur la valeur de $\alpha\delta L$ est, par rapport à ces variations elles-mêmes, du même ordre que le rapport de la masse du fluide à celle du sphéroïde. On peut ensuite, dans le calcul des attractions du Soleil et de la Lune sur la mer, négliger la partie de ces attractions dont la résultante passe par le centre du sphéroïde, et qui tiendrait par conséquent la Terre en équilibre autour de ce centre, si la mer venait à se consolider; car il est clair qu'en vertu de cette force la variation de $\frac{dA}{dt}$ se-

rait nulle dans cette hypothèse, et, par ce qui précède, l'état de fluidité de la mer ne peut influer sur cette variation. Cette partie des attractions produit dans l'océan les oscillations de la première et de la troisième espèce, que nous avons considérées dans les nos 5, 6, 9 et 10 du Livre IV. Quant à l'autre partie des attractions lunaire et solaire, on a vu, dans les nos 7 et 8 du Livre IV, qu'elle produit les oscillations de la seconde espèce, dont dépend la différence des deux marées d'un même jour; or, sans être en état de déterminer ces oscillations pour toutes les hypothèses de profondeur et de densité de la mer, on a vu cependant, dans les numéros cités, que les expressions de ces oscillations ne renferment ni termes proportionnels au temps, ni sinus ou cosinus d'angles croissant très-lentement, divisés par les coefficients du temps dans ces angles; en désignant donc par x', y', z' les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position d'une molécule fluide, que nous représenterons par dm, relativement au plan de projection, x', y', z', ainsi que $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, ne renfermeront aucun terme semblable, et cela est encore vrai de la différentielle $\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}$ et de son intégrale $\int dm\,\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}$, étendue à toute la masse fluide : cette intégrale représentant la partie de $\frac{dA}{dt}$ qui est relative au fluide, il en résulte que sa variation $\alpha\,\delta L$ ne renferme aucun terme de la nature de ceux dont il s'agit; on peut donc effacer $2\alpha\,\delta L$ de l'équation (q), ce qui la réduit à celle-ci

$$\begin{aligned} 0 = {} & n(\delta\theta' - \delta\theta)[\sin\gamma\cos\theta\cos(6 - \psi) - \cos\gamma\sin\theta] \\ & + n(\delta\psi' - \delta\psi)\sin\gamma\sin\theta\sin(6 - \psi) \\ & + (\delta n' - \delta n)[\cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta\cos(6 - \psi)]. \end{aligned}$$

Cette équation ayant lieu, quels que soient γ et 6, on peut y suppos[e] d'abord $6 = \psi$ et $\gamma = \theta$, ce qui donne $0 = \delta n' - \delta n$; l'équation préc[é]dente devient ainsi

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\delta\theta' - \delta\theta)[\sin\gamma\cos\theta\cos(6 - \psi) - \cos\gamma\sin\theta] \\ & + (\delta\psi' - \delta\psi)\sin\gamma\sin\theta\sin(6 - \psi). \end{aligned}$$

En supposant $\gamma = 0$ dans cette équation, on aura $0 = \delta\theta' - \delta\theta$, et par conséquent aussi $0 = \delta\psi' - \delta\psi$; on aura donc

$$\delta n' = \delta n, \quad \delta\theta' = \delta\theta, \quad \delta\psi' = \delta\psi,$$

d'où il suit que les variations du mouvement du sphéroïde terrestre recouvert d'un fluide sont les mêmes que si la mer formait une masse solide avec la Terre.

Maintenant il est facile d'étendre la démonstration précédente au cas de la nature, dans lequel la figure de la Terre et la profondeur de la mer sont fort irrégulières, et les oscillations des eaux sont altérées par un grand nombre d'obstacles; car tout se réduit à faire voir que $\alpha\delta L$ ne renferme alors ni terme proportionnel au temps, ni sinus ou cosinus d'angles croissant avec lenteur, divisés par le coefficient du temps dans ces angles; or, si l'on se rappelle ce que nous avons dit dans les n°s 14 et suivants du Livre IV, on voit que les expressions des coordonnées des molécules de l'océan ne renferment point de termes semblables; elles dépendent, à la vérité, des éléments de l'orbite de l'astre attirant, et ces éléments, croissant avec lenteur, introduisent dans les expressions de ces coordonnées des termes semblables, mais sans être divisés par de très-petits coefficients. Il est donc généralement vrai que, de quelque manière que les eaux de la mer réagissent sur la Terre, soit par leur attraction, ou par leur pression, ou par leur frottement et les diverses résistances qu'elles éprouvent, elles communiquent à l'axe de la Terre un mouvement à très-peu près égal à celui qu'il recevrait de l'action du Soleil et de la Lune sur la mer, si elle venait à former une masse solide avec la Terre.

Nous avons fait voir (n° 8) que le moyen mouvement de rotation de la Terre est uniforme, dans la supposition où cette planète est entièrement solide, et l'on vient de voir que la fluidité de la mer et de l'atmosphère ne doit point altérer ce résultat. Les mouvements que la chaleur du Soleil excite dans l'atmosphère, et d'où naissent les vents alisés, semblent devoir diminuer la rotation de la Terre : ces vents soufflent entre les tropiques, d'occident en orient, et leur action con-

tinuelle sur la mer, sur les continents et les montagnes qu'ils rencontrent paraît devoir affaiblir insensiblement ce mouvement de rotation. Mais le principe de la conservation des aires nous montre que l'effet total de l'atmosphère sur ce mouvement doit être insensible; car, la chaleur solaire dilatant également l'air dans tous les sens, elle ne doit point altérer la somme des aires décrites par les rayons vecteurs de chaque molécule de la Terre et de l'atmosphère, et multipliées respectivement par leurs molécules correspondantes, ce qui exige que le mouvement de rotation ne soit point diminué. Nous sommes donc assurés qu'en même temps que les vents alisés diminuent ce mouvement, les autres mouvements de l'atmosphère qui ont lieu au delà des tropiques l'accélèrent de la même quantité. On peut appliquer le même raisonnement aux tremblements de terre, et en général à tout ce qui peut agiter la Terre dans son intérieur et à sa surface. Le déplacement de ses parties peut seul altérer ce mouvement; si, par exemple, un corps placé au pôle était transporté à l'équateur, la somme des aires devant toujours rester la même, le mouvement de rotation de la Terre en serait un peu diminué; mais, pour que cela fût sensible, il faudrait supposer de grands changements dans la constitution de la Terre.

13. Comparons maintenant la théorie précédente aux observations, et voyons les conséquences qui en résultent sur la constitution du globe terrestre. Si, dans l'expression de θ du n° **6**, on réduit $\Sigma\frac{lc}{f}\cos(ft+6)$ dans une série ordonnée par rapport aux puissances de t, on aura, en ne conservant que la première puissance,

$$\Sigma\frac{lc}{f}\cos(ft+6)=\Sigma\frac{lc}{f}\cos 6-lt\Sigma c\sin 6.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement de 1750, où nous fixerons l'origine du temps t. Le carré de l'inclinaison de l'écliptique vraie sur ce plan étant, par le n° **5**,

$$[\Sigma c\sin(ft+6)]^2+[\Sigma c\cos(ft+6)]^2,$$

on a

$$\Sigma c \sin 6 = 0, \quad \Sigma c \cos 6 = 0,$$

ce qui donne, en négligeant le carré de ft,

$$\Sigma \frac{lc}{f} \cos(ft + 6) = \Sigma \frac{lc}{f} \cos 6.$$

En retranchant ce terme de h, on aura l'inclinaison moyenne de l'équateur à l'écliptique au commencement de 1750; mais, h étant arbitraire, on peut supposer qu'il exprime cette inclinaison moyenne, et alors il faut augmenter la valeur de h de $\Sigma \frac{lc}{f} \cos 6$ dans les autres termes de l'expression de θ; mais, vu la petitesse de ces termes, on peut se dispenser de cette opération. On aura ainsi

$$\theta = h + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos(f't + 6') + \frac{l \tang h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2v'\right);$$

la valeur de θ' du n° 7 deviendra

$$\theta' = h - t\Sigma cf \sin 6 + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos(f't + 6') + \frac{l \tang h}{2m(1+\lambda)} \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \lambda \cos 2v'\right).$$

Enfin, les valeurs de ψ et de ψ' des nos 6 et 7 deviennent, en comprenant dans l tout ce qui multiplie t,

$$\psi = lt - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \left(\sin 2v + \frac{m}{m'} \lambda \sin 2v'\right) + \frac{2l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cot 2h \sin(f't - 6'),$$

$$\psi' = lt - t \cot h \Sigma cf \cos 6 - \frac{l}{2m(1+\lambda)} \left(\sin 2v + \frac{m}{m'} \lambda \sin 2v'\right)$$
$$+ \frac{2l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cot 2h \sin(f't + 6').$$

Le terme $- t\Sigma cf \sin 6$ de l'expression de θ' exprime la diminution séculaire actuelle de l'obliquité de l'écliptique; les observations laissent encore de l'incertitude sur cet objet. En prenant un milieu entre leurs résultats, on peut fixer cette diminution à 154",3 dans ce siècle; ainsi, T représentant une année julienne, nous supposerons

$$T \Sigma cf \sin 6 = 1'',543.$$

Cette équation donne, par la théorie des planètes, que nous exposerons dans le Livre suivant,

$$T\Sigma cf\cos 6 = 0'',24794.$$

Les observations donnent à très-peu près la précession annuelle des équinoxes dans ce siècle égale à $154'',63$; partant,

$$lT - 0'',24794.\cot h = 154'',63.$$

L'obliquité de l'écliptique en 1750 a été observée de $26°,0796$; c'est la valeur de h, d'où l'on tire

$$lT = 155'',20.$$

L'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire à l'écliptique est de $5°,7188$, ce qui donne

$$c' = \text{tang}\,5°,7188.$$

$f'T$ est le mouvement sidéral des nœuds de l'orbite lunaire pendant une année julienne, et les observations donnent

$$f'T = 215063'';$$

l'année sidérale étant de $365^j,256384$, on a

$$mT = \frac{400°.365^j,25}{365^j,256384} = 399°,9930.$$

Enfin, les observations donnent $m = m'.0,07480$, et les observations des marées nous ont donné, dans le Livre IV, $\lambda = 3$; cela posé, les valeurs précédentes de θ, θ', ψ et ψ' deviendront

$$\theta = 26°,0796 + 31'',036.\cos A' + 1'',341.\cos 2v + 0'',301.\cos 2v',$$

$$\theta' = 26°,0796 - i.1'',543 + 31'',036.\cos A' + 1'',341.\cos 2v + 0'',301.\cos 2v',$$

$$\psi = i.155'',20 - 57'',998.\sin A' - 3'',088.\sin 2v - 0'',693.\sin 2v',$$

$$\psi' = i.154'',63 - 57'',998.\sin A' - 3'',088.\sin 2v - 0'',693.\sin 2v',$$

i étant le nombre des années juliennes écoulées depuis le commence-

ment de 1750, et A' étant la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire.

Si l'on nomme υ l'ascension droite d'une étoile, et s sa déclinaison, s étant négatif lorsque la déclinaison est australe; si l'on désigne ensuite par $\delta\theta$, $\delta\theta'$, $\delta\psi$, $\delta\psi'$, $\delta\upsilon$ et δs des variations très-petites de θ, θ', ψ, ψ', υ et s, on trouvera, par les formules différentielles de la Trigonométrie sphérique,

$$\delta s = \delta\psi \sin\theta \cos\upsilon + \delta\theta \sin\upsilon,$$

$$\delta\upsilon = \delta\psi \cos\theta + \delta\psi \sin\theta \operatorname{tang} s \sin\upsilon - \delta\theta \operatorname{tang} s \cos\upsilon - \frac{iT}{\sin h}\Sigma cf \cos 6.$$

On pourra, au moyen de ces formules, transporter les catalogues d'étoiles d'une époque à une autre peu éloignée; mais, pour plus d'exactitude, il faudra prendre pour θ, υ et s les valeurs qui correspondent au milieu de l'intervalle de temps compris entre ces deux époques. Le terme $\frac{iT\Sigma cf\cos 6}{\sin h}$ est, par ce qui précède, égal à $i.0'',62248$: ces valeurs de δs et de $\delta\upsilon$ donnent

$$\delta\theta = \frac{\delta s(\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tang} s \sin\upsilon) - (\delta\upsilon + i.0'',62248)\sin\theta\cos\upsilon}{\cos\theta\sin\upsilon + \sin\theta \operatorname{tang} s},$$

$$\delta\psi = \frac{\delta s \operatorname{tang} s \cos\upsilon + (\delta\upsilon + i.0'',62248)\sin\upsilon}{\cos\theta\sin\upsilon + \sin\theta\operatorname{tang} s}.$$

Les variations observées de l'ascension droite et de la déclinaison des étoiles feront ainsi connaître celles de θ et de ψ. C'est de cette manière que Bradley a reconnu l'inégalité principale de θ, désignée par le nom de *nutation*, et qui dépend de la longitude du nœud de l'orbite lunaire. Ses observations lui ont donné $27'',778$ pour le coefficient de $\cos A'$ dans l'expression de θ; Maskelyne, par une discussion plus exacte encore des mêmes observations, a trouvé ce coefficient égal à $29'',321$, et nous l'avons trouvé, par la théorie, égal à $31'',036$; la petite différence est dans les limites des erreurs des observations, qui s'accordent autant qu'on doit le souhaiter avec la loi de la pesanteur universelle. On les ferait coïncider exactement en diminuant un peu la valeur de λ, que

nous avons supposée égale à 3; on pourrait même déterminer cette valeur par ces observations; mais, les phénomènes des marées me paraissant la donner avec plus d'exactitude, le coefficient dont nous venons de parler doit très-peu différer de 31″,036.

Le mouvement rétrograde ψ des équinoxes sur l'écliptique fixe est produit par le mouvement rétrograde du pôle terrestre sur un cercle parallèle à cette écliptique; ce second mouvement est égal à $\psi \sin h$, ou à $lt \sin h - \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \frac{\cos 2h}{\cos h} \sin \mathrm{A}'$, en ne considérant, avec les astronomes, que la plus grande des inégalités périodiques de ψ. L'inégalité $\frac{l\lambda c'}{(1+\lambda)f'} \cos \mathrm{A}'$ de θ indique dans le pôle terrestre un mouvement dans le sens du cercle de latitude qui passe par ce pôle. Ces deux mouvements peuvent être représentés de cette manière. On conçoit le pôle de l'équateur mû sur la circonférence d'une petite ellipse tangente à la sphère céleste, et dont le centre, que l'on peut regarder comme le pôle moyen de l'équateur, décrit uniformément, chaque année, 155″,20 du parallèle à l'écliptique fixe sur lequel il est situé. Le grand axe de cette ellipse, toujours tangent au cercle de latitude et dans le plan de ce grand cercle, sous-tend un angle de 62″,1; le grand axe est au petit axe comme le cosinus de l'obliquité de l'écliptique est au cosinus du double de cette obliquité; ce petit axe sous-tend par conséquent un angle de 46″,2. La situation du vrai pôle de l'équateur sur cette ellipse se détermine ainsi. On imagine sur le plan de l'ellipse un petit cercle qui a le même centre, et dont le diamètre est égal à son grand axe; on conçoit encore un rayon de ce cercle, mû uniformément d'un mouvement rétrograde, de manière que ce rayon coïncide avec la moitié du grand axe la plus voisine de l'écliptique, toutes les fois que le nœud moyen ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec l'équinoxe du printemps; enfin de l'extrémité de ce rayon mobile on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe de l'ellipse; le point où cette perpendiculaire coupe la circonférence de cette ellipse est le lieu du vrai pôle de l'équateur.

Jusqu'ici les astronomes n'ont point eu égard aux inégalités dépen-

dantes de l'angle $2v$; mais, vu la précision des observations modernes, ces inégalités ne doivent point être négligées.

14. Reprenons la valeur de l, trouvée dans le n° 6, et, pour plus d'exactitude, conservons les carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites; on aura

$$l\mathrm{T} = \frac{3m}{4n} m\mathrm{T}\cos h \frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\left(\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \lambda.\frac{2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma}{2(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

e étant l'excentricité de l'orbite solaire, e' étant celle de l'orbite lunaire, et γ étant l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique. Les observations donnent

$$e = 0,0168 14, \qquad e' = 0,0550368;$$

$\frac{m}{n}$ est le rapport du jour sidéral à l'année sidérale, et ce rapport est égal à 0,00273033; on aura ainsi

$$l\mathrm{T} = \frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}(1+\lambda.0,992010).7516'',30.$$

On peut supposer sans erreur sensible, par le numéro précédent, $l\mathrm{T} = 155'',20$; on aura donc, en faisant $\lambda = 3(1+6)$,

$$\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{0,00519323}{1+6.0,748493}.$$

On a à fort peu près, par le n° 2,

$$\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{2\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi)\int\rho a^2 da}{\int\rho a^4 da};$$

il est remarquable que la valeur de h^{IV} du même numéro n'entre point dans cette équation; d'où il suit que les mouvements de la Terre autour de son centre de gravité sont les mêmes que si elle était un ellipsoïde de révolution, dont αh serait l'ellipticité. $\frac{1}{2}\alpha\varphi$ étant égal à $\frac{1}{578}$, la comparaison des deux expressions précédentes de $\frac{2\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$ donnera

$$\alpha h = 0,0017301 + \frac{0,0025966 1.\int\rho a^4 da}{(1+6.0,748493)\int\rho a^2 da}.$$

On doit supposer, conformément aux lois de l'Hydrostatique, que la densité des couches du sphéroïde terrestre diminue du centre à la surface, et dans ce cas $\int \rho a^4 da$ est plus petit que $\frac{3}{5}\int \rho a^2 da$; en faisant donc $6 = 0$, conformément aux observations des marées, la valeur de αh sera moindre que 0,0032881 ou que $\frac{1}{304}$. Si la Terre est elliptique, αh exprime son ellipticité; on ne peut donc pas supposer cette ellipticité plus grande que $\frac{1}{304}$. Cette fraction et celle-ci $\frac{1}{578}$ sont les limites de cette ellipticité, qui résultent des phénomènes de la précession et de la nutation de l'axe terrestre.

On a vu, dans le Livre III, que $\alpha h = \frac{5}{4}\alpha\varphi$, dans l'hypothèse de l'homogénéité de la Terre, ce qui donne, en vertu de l'équation précédente, $3\mathrm{6}$ égal à fort peu près à $-\frac{8}{5}$, et par conséquent $\lambda = \frac{7}{5}$. Cette valeur est trop éloignée de satisfaire aux phénomènes des marées pour pouvoir être admise. Dans ce cas, la nutation ne serait que $\frac{7}{9}$ de la précédente, et par conséquent 24″,1, ce qui diffère trop des observations astronomiques pour être admis; ainsi ces observations et celles des marées concourent à faire rejeter l'hypothèse de la Terre homogène. Déjà les observations de la longueur du pendule à secondes nous ont conduits à ce résultat dans le Livre III; elles nous ont donné $\frac{1}{321}$ au plus pour la valeur de αh. Cette fraction étant moindre que $\frac{1}{304}$, on voit que les observations de la longueur du pendule se concilient très-bien avec celles de la nutation et de la précession et avec les observations des marées.

Pour mieux saisir l'ensemble des phénomènes qui tiennent à la figure de la Terre et leur accord avec le principe de la pesanteur universelle, rappelons les divers résultats auxquels nous sommes parvenus sur la nature des rayons terrestres.

L'expression du rayon d'un sphéroïde quelconque très-peu différent d'une sphère peut être mise sous cette forme

$$1 + \alpha(Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots).$$

Si l'on fixe relativement à la Terre l'origine de ce rayon au centre de gravité de la planète, on a vu, dans le n° 31 du Livre III, que les con-

ditions de l'équilibre de la mer donnent $Y^{(1)} = 0$, ce qui réduit l'expression du rayon terrestre à cette forme

$$1 + \alpha(Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots).$$

L'état permanent de l'équilibre de la mer exige que l'axe de rotation de la Terre soit un de ses axes principaux, et pour cela il faut, par le n° **32** du Livre III, que $Y^{(2)}$ soit de cette forme

$$-h(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + h^{\text{IV}}(1 - \mu^2)\cos 2\varpi,$$

h et h^{IV} étant deux constantes arbitraires que l'observation seule peut déterminer, et qui dépendent de la constitution du globe terrestre.

Ces résultats sont les seuls que fournit l'état permanent de l'équilibre de la Terre; ils sont communs à tous les corps célestes que recouvre un fluide en équilibre. Les observations sur la longueur du pendule à secondes ont donné de nouvelles lumières sur la nature du rayon terrestre : elles nous ont appris que la constante αh est à fort peu près égale à 0,002978, par le n° **42** du Livre III; que la constante h^{IV} est insensible relativement à h; que la quantité $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots$ est pareillement très-petite relativement à $Y^{(2)}$; qu'il en est de même de la première différence de cette quantité par rapport à celle de $Y^{(2)}$, et qu'ainsi l'on peut, dans le calcul du rayon terrestre et de sa première différence, lui supposer, sans erreur sensible, cette forme

$$1 - 0{,}002978.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Les mesures des degrés des méridiens font voir que cette supposition ne doit pas s'étendre jusqu'aux secondes différences du rayon terrestre, et que la fonction $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots$ acquiert, par une seconde différentiation, une valeur sensible.

Le phénomène de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre ne dépend, comme on l'a vu, que de $Y^{(2)}$; il ne détermine pas la valeur de αh, mais il donne les limites entre lesquelles cette valeur est comprise : ces limites sont $\frac{1}{304}$ et $\frac{1}{578}$; la valeur précédente, qui résulte des observations sur la pesanteur, tombe dans ces limites;

elle indique, de plus, une diminution dans la densité des couches du sphéroïde terrestre, depuis le centre jusqu'à la surface, sans nous instruire cependant de la véritable loi de cette diminution, dont l'existence est prouvée d'ailleurs soit par la stabilité de l'équilibre des mers, soit par le peu d'action des montagnes sur le fil-à-plomb, soit enfin par les principes de l'Hydrostatique, qui exigent que, si la Terre a été primitivement fluide, les parties voisines du centre soient en même temps les plus denses.

Ainsi chaque phénomène dépendant de la figure de la Terre nous éclaire sur la nature du rayon terrestre, et l'on voit qu'ils sont tous parfaitement d'accord entre eux. Ils ne suffisent pas, à la vérité, pour nous faire connaître la constitution intérieure de la Terre; mais ils indiquent l'hypothèse la plus vraisemblable, celle d'une densité décroissante du centre à la surface. La pesanteur universelle est donc la vraie cause de ces phénomènes, et, si elle ne s'y manifeste pas d'une manière aussi précise que dans les mouvements planétaires, cela vient de ce que les inégalités de la force attractive des planètes, qui tiennent aux petites irrégularités de leur surface ou de leur intérieur, disparaissent à de grandes distances, et ne laissent apercevoir que le simple phénomène de la tendance mutuelle de ces corps vers leurs centres de gravité.

L'hypothèse de Bouguer, que nous avons examinée dans le n° 33 du Livre III, donne $\alpha h = 0{,}0054717$ ou $\frac{1}{183}$, ce qui s'éloigne trop de la limite $\frac{1}{304}$ pour être admissible; ainsi les phénomènes de la précession et de la nutation concourent avec les observations du pendule à faire rejeter cette hypothèse.

CHAPITRE II.

DES MOUVEMENTS DE LA LUNE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

15. La Lune, en tournant autour de la Terre, nous présente toujours, à fort peu près, la même face, ce qui prouve que son moyen mouvement de rotation est exactement égal à son moyen mouvement de révolution, et que son axe de rotation est presque perpendiculaire au plan de l'écliptique. Les observations du mouvement des taches de la Lune conduisirent Dominique Cassini à ce résultat remarquable, savoir que *l'équateur lunaire est incliné d'environ* 278′ *au plan de l'écliptique, et que le nœud descendant de cet équateur coïncide constamment avec le nœud ascendant de l'orbite lunaire*. Tobie Mayer a confirmé, depuis, ce résultat par un grand nombre d'observations, qu'il a faites lui-même vers le milieu de ce siècle et qu'il a discutées avec tout le soin possible : seulement il a trouvé l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique moindre que Cassini ne l'avait supposée, et de 165′; et, pour détruire le soupçon que cette inclinaison a pu diminuer depuis le temps de ce grand astronome, il assure avoir reconnu, par les observations de ce temps, qu'elle était la même alors qu'aujourd'hui, c'est-à-dire de 165′. Voyons maintenant ce qui doit résulter, à cet égard, de l'action de la Terre et du Soleil sur le sphéroïde lunaire.

16. Considérons d'abord l'action de la Terre, et reprenons pour cela les équations (G) du n° **4**, qui s'appliquent évidemment à la Lune, en observant qu'alors L représente la Terre, $r_,$ son rayon vecteur mené du centre de la Lune, supposé immobile, et que X, Y, Z sont les trois

coordonnées de la Terre, rapportées à une écliptique fixe passant par le centre de la Lune. L'angle θ étant fort petit, nous négligerons son carré et son produit par Z; nous négligerons pareillement le produit $\frac{B-A}{C}rq$, à cause de la petitesse des trois facteurs $\frac{B-A}{C}$, r et q : les équations (G) deviendront ainsi

$$(G')\quad\begin{cases} dp = \dfrac{3L\,dt}{2r_{,}^{5}}\,\dfrac{B-A}{C}\,[(Y^2 - X^2)\sin 2\varphi + 2XY\cos 2\varphi], \\ dq + \dfrac{C-B}{A}\,rp\,dt = \dfrac{3L\,dt}{r_{,}^{5}}\,\dfrac{C-B}{A}\begin{bmatrix} (Y^2\theta + YZ)\cos\varphi \\ -(XY\theta + XZ)\sin\varphi \end{bmatrix}, \\ dr + \dfrac{A-C}{B}\,pq\,dt = \dfrac{3L\,dt}{r_{,}^{5}}\,\dfrac{A-C}{B}\begin{bmatrix} (XY\theta + XZ)\cos\varphi \\ +(Y^2\theta + YZ)\sin\varphi \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Si l'on nomme v le mouvement vrai en longitude de la Terre vue de la Lune, ce mouvement étant rapporté au nœud descendant de l'équateur lunaire, on aura, en négligeant le carré de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique,

$$X = r_{,}\cos v, \qquad Y = r_{,}\sin v;$$

la première des équations (G') devient ainsi

$$dp = \frac{3L\,dt}{2r_{,}^{3}}\,\frac{B-A}{C}\sin(2v - 2\varphi).$$

Pour intégrer cette équation, nous observerons que, si l'on désigne par m la vitesse moyenne angulaire de la Terre autour de la Lune, son moyen mouvement sera $\int m\,dt$, et l'on aura

$$v = \int m\,dt + \psi + H\sin\Pi + \ldots,$$

$H\sin\Pi + \ldots$ exprimant les inégalités de v, ordonnées par rapport au moyen mouvement. Soit

$$u = \varphi - \psi - \int m\,dt;$$

on aura

$$2v - 2\varphi = -2u + 2H\sin\Pi + \ldots,$$

et par conséquent,

$$\sin(2v - 2\varphi) = -\sin 2u + 2H\cos 2u\sin\Pi + \ldots.$$

Si l'on néglige le carré de θ, on a, par le n° 4,

$$p = \frac{d\varphi - d\psi}{dt};$$

partant,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{dm}{dt};$$

la première des équations (G') prendra donc cette forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{dm}{dt} = -\frac{3\mathrm{L}}{2r_{,}^3}\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\sin 2u + \frac{3\mathrm{L}}{r_{,}^3}\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\mathrm{H}\cos 2u \sin \Pi + \ldots.$$

Les observations nous ayant fait connaître que le moyen mouvement de rotation de la Lune est égal à son moyen mouvement de révolution autour de la Terre, l'angle u est toujours fort petit, en sorte que l'on peut supposer $\sin 2u = 2u$, et $\cos 2u = 1$; on a d'ailleurs, à fort peu près, $\frac{\mathrm{L}}{r_{,}^3} = m^2$; on aura donc

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 3m^2\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}u = -\frac{dm}{dt} + 3m^2\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\mathrm{H}\sin\Pi + \ldots.$$

La valeur de $\frac{dm}{dt}$ dépend de l'équation séculaire de la Lune, et nous verrons dans la théorie de la Lune que, si $m't$ est le moyen mouvement sidéral du Soleil, et e' l'excentricité de son orbite, on a

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{3m'^2 e' de'}{m\,dt};$$

on aura donc à très-peu près, en intégrant l'équation précédente et en négligeant la quantité $\dfrac{m'^2 d^2(e'de')}{m^5 dt^3 \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}$,

$$u = \mathrm{Q}\sin\left(mt\sqrt{3\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} + \mathrm{F}\right) + \frac{m'^2 e' \frac{de'}{dt}}{m^3\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}}$$

$$- 3m^2\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\,\frac{\mathrm{H}\sin\Pi}{\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 - 3m^2\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}} - \ldots,$$

Q et F étant deux constantes arbitraires. Examinons les conséquences qui résultent de cette intégrale.

Nous observerons d'abord que le terme $\dfrac{m'^2 e' \frac{de'}{dt}}{m^3 \frac{B-A}{C}}$ de cette intégrale est insensible, quoique divisé par la petite fraction $\frac{B-A}{C}$, vu l'excessive lenteur avec laquelle l'excentricité e' varie; on peut donc négliger ce terme. Tous les autres termes de l'expression de u varient d'une manière beaucoup plus rapide; mais cette expression reste toujours fort petite, si Q est un petit coefficient. Présentement, l'équation

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{dm}{dt}$$

donne

$$\int p\,dt = u + \int m\,dt;$$

$\int p\,dt$ est, par le n° 8, le mouvement de rotation de la Lune autour de son troisième axe principal; on voit donc que les deux moyens mouvements de rotation et de révolution de cet astre sont parfaitement égaux entre eux, et que l'action de la Terre sur le sphéroïde lunaire fait participer le premier de ces deux mouvements aux inégalités séculaires du second. Il n'est point nécessaire pour cette égalité parfaite qu'à l'origine les deux mouvements de rotation et de révolution aient été égaux, ce qui serait infiniment peu vraisemblable; il suffit qu'à cette origine, où nous supposons $t = 0$, la vitesse p de rotation de la Lune ait été comprise dans les limites

$$m + mQ\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} + \ldots \quad \text{et} \quad m - mQ\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}} - \ldots,$$

limites dont l'étendue est arbitraire, à cause de l'arbitraire Q. Cette étendue est, à la vérité, fort petite, à raison de la petitesse de Q et de $\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$; mais elle suffit pour faire disparaître l'invraisemblance qu'il y a à supposer qu'à l'origine les mouvements ont été tels que,

dans la suite, le moyen mouvement de rotation de la Lune a constamment égalé son mouvement moyen de révolution.

La valeur de u exprime la libration réelle de la Lune en longitude, libration qui n'est que l'excès de son mouvement réel de rotation sur son moyen mouvement. Cette valeur renferme d'abord l'argument $Q\sin\left(mt\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}+F\right)$, dont l'étendue est arbitraire; mais, les observations ne l'ayant point fait reconnaître, il doit être peu considérable. Il en résulte que $\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$ est un nombre réel; car, s'il était imaginaire, l'argument précédent se changerait en exponentielles ou en arcs de cercle, qui, croissant indéfiniment avec le temps, pourraient augmenter indéfiniment la valeur de u, ce qui est contraire aux observations. A la vérité, si, $B-A$ étant négatif, Q était nul, il n'y aurait dans l'expression de u ni arcs de cercles, ni exponentielles; mais la plus légère cause pourrait les y introduire; ce serait le cas d'un état d'équilibre sans stabilité, ce qui ne peut être admis. $B-A$ est donc une quantité positive, c'est-à-dire que le moment d'inertie A de la Lune est plus petit que le moment d'inertie B. Le premier de ces moments est relatif à l'axe principal de l'équateur, dirigé vers la Terre; car il se rapporte au premier axe principal qui forme l'angle φ avec la ligne des équinoxes lunaires, tandis que le rayon mené du centre de la Lune à celui de la Terre forme l'angle v avec cette même ligne; or $\varphi-v$ est toujours, par ce qui précède, un petit angle; ainsi le premier axe principal du sphéroïde lunaire est toujours à peu près dirigé vers la Terre. L'équateur lunaire étant allongé dans ce sens en vertu de l'attraction terrestre, le moment d'inertie A doit être moindre que le moment d'inertie B relatif au second axe principal situé dans l'équateur.

La durée de la période de l'argument précédent est égale à un mois sidéral, divisé par le coefficient $\sqrt{\frac{3(B-A)}{C}}$; ce coefficient étant inconnu, il est impossible d'assigner cette durée. Nous verrons bientôt que, dans le cas où la Lune serait homogène, cette durée n'excéderait pas sept années, et que, dans le cas de la nature, la différence des

moments d'inertie de la Lune par rapport à ses trois axes principaux est probablement plus grande que dans le cas de l'homogénéité. Cette remarque nous montre combien le terme $-\dfrac{m'^2 e' de'}{m^2 \frac{B-A}{C} dt}$, que nous avons négligé ci-dessus, est insensible.

Parmi les termes de l'expression de u, il n'y a de sensibles que celui qui dépend de l'équation du centre de la Lune, à raison de sa grandeur, et les termes qui ont un très-petit diviseur et dans lesquels, par conséquent, $\frac{d\Pi}{dt}$ est très-petit. $H \sin \Pi + \ldots$ est la somme des termes périodiques du mouvement vrai de la Lune, et, en supposant que $H \sin \Pi$ exprime l'équation du centre, on a $H = 70005''$; Π étant ici l'anomalie moyenne de la Lune, on a $\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 = m^2 . 0{,}98317$; on aura donc, dans l'expression de u, le terme

$$-\frac{3\frac{B-A}{C} \cdot 70005''. \sin \Pi}{0{,}98317 - 3\frac{B-A}{C}}.$$

Si ce terme s'élevait à un nombre i de secondes, on aurait

$$\frac{B-A}{C} = \frac{i . 0{,}32772}{i + 70005''}.$$

Puisque l'observation n'a point fait reconnaître le terme dont il s'agit, le nombre i ne doit pas excéder $\pm 6000''$, et alors $\frac{B-A}{C}$ doit être au-dessous de $0{,}030721$.

Parmi les termes de l'expression de u qui ont de très-petits diviseurs, on ne voit que l'équation annuelle qui puisse produire un terme sensible dans l'expression de u; cette équation est égale à $2064''. \sin \Pi$, Π étant ici l'anomalie moyenne du Soleil; on a, de plus, $\frac{d\Pi}{dt} = m . 0{,}0748$, et par conséquent $\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 = m^2 . 0{,}005595$; on aura donc, dans l'expression de u, l'argument

$$-\frac{3\frac{B-A}{C} \cdot 2064''. \sin \Pi}{0{,}005595 - 3\frac{B-A}{C}}.$$

Si cet argument s'élevait au nombre i de secondes, on aurait

$$\frac{B - A}{C} = \frac{i.0,001865}{i + 2064''}.$$

Cet argument doit être peu considérable, puisqu'il n'a point été reconnu par l'observation; nous supposerons ainsi que i n'excède pas $\pm 6000''$. Dans le cas de i positif, les deux limites de $\frac{B - A}{C}$ sont o et 0,0013876 : ces limites sont 0,0028430 et ∞ dans le cas de i négatif, et l'on vient de voir que $\frac{B - A}{C}$ ne peut pas excéder 0,030721. Mais il est très-vraisemblable que $\frac{B - A}{C}$ est au-dessous de 0,0028430, et qu'ainsi i est positif.

17. Considérons maintenant la seconde et la troisième des équations (G') du numéro précédent. L'inclinaison θ de l'équateur lunaire à l'écliptique fixe étant supposée très-petite, nous transformerons les variables q et r en d'autres qui rendront l'intégration plus facile, ainsi que nous l'avons déjà fait pour un cas semblable, dans le n° **30** du Livre I; nous ferons donc

$$\theta \sin\varphi = s, \qquad \theta \cos\varphi = s',$$

ce qui donne

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \sin\varphi + \theta \frac{d\varphi}{dt} \cos\varphi,$$

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi - \theta \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi.$$

Mais, si l'on néglige le carré de θ, on a, par le n° **4**,

$$\frac{d\theta}{dt} = r \sin\varphi - q \cos\varphi,$$

$$\theta \frac{d\varphi}{dt} = \theta p + q \sin\varphi + r \cos\varphi;$$

on aura donc

$$\frac{ds}{dt} = ps' + r, \qquad \frac{ds'}{dt} = -ps - q,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2s}{dt^2} - p\frac{ds'}{dt} - s'\frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + p\frac{ds}{dt} + s\frac{dp}{dt} = -\frac{dq}{dt}.$$

En substituant ces valeurs de $\frac{dr}{dt}$ et de $-\frac{dq}{dt}$ dans les deux dernières des équations (G′), et observant que l'on peut supposer $p = m$ dans les produits de p et de sa différentielle par les variables très-petites s, s' et par leurs différences, on aura

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + m\frac{ds}{dt} = \frac{C-B}{A}mr + \frac{3L}{r_{,}^5}\,\frac{B-C}{A}[(Y^2\theta + YZ)\cos\varphi - (XY\theta + XZ)\sin\varphi],$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - m\frac{ds'}{dt} = \frac{C-A}{B}mq + \frac{3L}{r_{,}^5}\,\frac{A-C}{B}[(XY\theta + XZ)\cos\varphi + (Y^2\theta + YZ)\sin\varphi].$$

Maintenant on a

$$r = \frac{ds}{dt} - ms', \qquad q = -\frac{ds'}{dt} - ms;$$

on a ensuite

$$X = r_{,}\cos v; \qquad Y = r_{,}\sin v;$$

de plus, $v - \varphi$ est toujours, par ce qui précède, un très-petit angle, de manière que l'on peut négliger son produit par les quantités θ et Z; les équations différentielles précédentes deviendront ainsi, en y substituant m^2 au lieu de $\frac{L}{r_{,}^3}$,

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{A+B-C}{A}m\frac{ds}{dt} - m^2\,\frac{B-C}{A}s' = 0,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{A+B-C}{B}m\frac{ds'}{dt} - 4m^2\frac{A-C}{B}s = 3m^2\frac{A-C}{B}\,\frac{Z}{r_{,}}.$$

$\frac{Z}{r_{,}}$ est la latitude de la Terre vue de la Lune, au-dessus du plan fixe, latitude qui est égale et de signe contraire à celle de la Lune vue de la Terre; on aura donc, par le n° 5,

$$\frac{Z}{r_{,}} = c'\sin(mt + g't + 6') + \Sigma c\sin(mt - gt - 6),$$

mt étant la longitude moyenne de la Terre, vue de la Lune, relativement à un équinoxe fixe, et $-g't-6'$ étant ici, par rapport au même équinoxe, la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique mobile. La fonction $\Sigma c \,{\sin \atop \cos}\,(gt+6)$ dépend du déplacement de l'écliptique mobile, et le coefficient g est extrêmement petit relativement à m et à g'. Soient donc

$$s = Q\sin(mt+g't+6'),$$
$$s' = Q'\cos(mt+g't+6')$$

les parties de s et de s' correspondantes au terme $c'\sin(mt+g't+6')$ de l'expression de $\frac{Z}{r_{\prime}}$; on aura

$$Q' = \frac{m(m+g')(A+B-C)Q}{(m+g')^2A+m^2(B-C)},$$

et, si l'on suppose

$$E = m^2(m+g')^2[(A+B-C)^2-4A(A-C)-B(B-C)] - (m+g')^4AB - 4m^4(A-C)(B-C),$$

on aura

$$Q = \frac{3m^2(A-C)c'}{E}[(m+g')^2A+m^2(B-C)].$$

Si l'on néglige le carré de $\frac{g'}{m}$ et son produit par $A-C$, $B-C$ et $A-B$, dans le numérateur et le dénominateur de cette expression de Q, on aura

$$Q = -\frac{3m(A-C)c'}{3m(A-C)+2Ag'};$$

on aura ensuite, en regardant g' comme très-petit, $Q'=Q$.

Il suit de là que les valeurs de s et de s', correspondantes à la valeur de $\frac{Z}{r_{\prime}}$, sont, en observant que g est insensible relativement à $3m\frac{C-A}{2A}$,

$$s = -\frac{3m(A-C)c'\sin(mt+g't+6')}{3m(A-C)+2Ag'} - \Sigma c\sin(mt-gt-6),$$

$$s' = -\frac{3m(A-C)c'\cos(mt+g't+6')}{3m(A-C)+2Ag'} - \Sigma c\cos(mt-gt-6).$$

Ces deux valeurs de s et de s' ne sont pas complètes; il faut encore leur ajouter celles qui auraient lieu dans le cas où Z serait nul; or il est aisé de voir que, si l'on nomme l et l' les deux valeurs positives de $m+g'$ dans l'équation $E=0$, on aura à très-peu près

$$s = P\sin(lt+I) + P'\sin(l't+I'),$$

$$s' = P\cos(lt+I) + 2P'\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\cos(l't+I'),$$

$$l = m - \tfrac{3}{2}m\frac{A-C}{A},$$

$$l' = 2m\frac{\sqrt{(A-C)(B-C)}}{A},$$

P, P', I et I' étant quatre constantes arbitraires. En réunissant ces valeurs de s et de s' aux précédentes, on aura les valeurs complètes de ces variables.

Afin que ces valeurs n'augmentent point indéfiniment, et pour que l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique soit toujours à peu près constante, conformément aux observations, il est nécessaire que le produit $(A-C)(B-C)$ soit positif; c'est, en effet, ce qui a lieu dans la nature; car le moment d'inertie C de la Lune, par rapport à son troisième axe principal, autour duquel elle tourne, est plus grand que les moments d'inertie A et B relatifs à ses deux autres axes principaux, puisque la Lune doit être plus aplatie dans le sens de ses pôles de rotation que dans tout autre sens.

Pour rapporter les variables s et s' à l'écliptique mobile, nommons $\theta_,$ l'inclinaison de l'équateur lunaire sur cette écliptique, et $\varphi_,$ la distance angulaire du premier axe principal au nœud descendant de l'équateur lunaire relativement à la même écliptique; il est facile de voir que l'on aura

$$\theta_, \sin\varphi_, - \Sigma c\sin(mt-gt-6) = \theta\sin\varphi,$$

$$\theta_, \cos\varphi_, - \Sigma c\cos(mt-gt-6) = \theta\cos\varphi;$$

en faisant donc $s_{,} = \theta_{,} \sin\varphi_{,}$, $s'_{,} = \theta_{,} \cos\varphi_{,}$, on aura

$$s_{,} = \mathrm{P}\sin(lt + \mathrm{I}) + \mathrm{P}'\sin(l't + \mathrm{I}') - \frac{3m(\mathrm{A} - \mathrm{C})c'\sin(mt + g't + \varepsilon')}{3m(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + 2\mathrm{A}g'},$$

$$s'_{,} = \mathrm{P}\cos(lt + \mathrm{I}) + 2\mathrm{P}'\sqrt{\frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B} - \mathrm{C}}}\cos(l't + \mathrm{I}') - \frac{3m(\mathrm{A} - \mathrm{C})c'\cos(mt + g't + \varepsilon')}{3m(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + 2\mathrm{A}g'}.$$

On voit ainsi que le mouvement de l'équateur lunaire sur l'écliptique vraie ou mobile est indépendant du mouvement de cette écliptique, en sorte que l'inclinaison moyenne de cet équateur sur l'écliptique vraie reste toujours la même, malgré le déplacement de cette écliptique, l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire ramenant sans cesse l'équateur de ce sphéroïde au même degré d'inclinaison.

Les deux valeurs de $s_{,}$ et de $s'_{,}$ donnent

$$\tan\varphi_{,} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 3m(\mathrm{A} - \mathrm{C})c'\sin(mt + g't + \varepsilon') \\ -[3m(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + 2\mathrm{A}g'][\mathrm{P}\sin(lt + \mathrm{I}) + \mathrm{P}'\sin(l't + \mathrm{I}')] \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 3m(\mathrm{A} - \mathrm{C})c'\cos(mt + g't + \varepsilon') \\ -[3m(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + 2\mathrm{A}g']\left[\mathrm{P}\cos(lt + \mathrm{I}) + 2\mathrm{P}'\sqrt{\frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B} - \mathrm{C}}}\cos(l't + \mathrm{I}')\right] \end{array}\right\}}.$$

Supposons d'abord P et P′ nuls; on aura

$$\tan\varphi_{,} = \tan(mt + g't + \varepsilon'),$$

ce qui donne l'une ou l'autre de ces deux valeurs de $\varphi_{,}$,

$$\varphi_{,} = mt + g't + \varepsilon',$$
$$\varphi_{,} = \pi + mt + g't + \varepsilon',$$

π étant la demi-circonférence ou égal à deux angles droits. Pour déterminer laquelle de ces deux valeurs a lieu dans la nature, nous observerons que $-g't - \varepsilon'$ est la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, et les observations nous apprennent que cette longitude est la même que celle du nœud descendant de cet équateur sur cette écliptique; or le mouvement de rotation de la Lune étant égal à son moyen mouvement de révolution, et son premier axe principal étant toujours à peu près dirigé vers la Terre, on a $\varphi_{,}$ plus

la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire, égal à mt; on a donc

$$\varphi_{,} = mt + g't + 6'.$$

Ainsi la première des deux valeurs de $\varphi_{,}$ doit seule être admise; l'équation $s_{,} = \theta_{,} \sin \varphi_{,}$ donnera, par conséquent,

$$\theta_{,} = \frac{3m(C-A)c'}{2Ag' - 3m(C-A)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C-A}{A} = \frac{2g'\theta_{,}}{3m(c'+\theta_{,})}.$$

Mayer a trouvé, par ses observations, $\theta_{,} = 165'$; on a de plus

$$c' = \operatorname{tang} 5^{\circ},7188, \quad \text{et} \quad g' = m.0,004019;$$

partant,

$$\frac{C-A}{A} = 0,000599.$$

Les résultats précédents n'ont lieu que dans le cas où les arbitraires P et P' sont nulles; examinons le cas dans lequel ces constantes, sans être nulles, sont très-petites. On a généralement

$$\operatorname{tang}(\varphi_{,} - mt - g't - 6') = \frac{\operatorname{tang}\varphi_{,} - \operatorname{tang}(mt + g't + 6')}{1 + \operatorname{tang}\varphi_{,} \operatorname{tang}(mt + g't + 6')};$$

en substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de $\operatorname{tang}\varphi_{,}$, sa valeur complète, et faisant, pour abréger,

$$Q = \frac{-3m(C-A)c'}{2Ag' - 3m(C-A)},$$

on aura

$$\operatorname{tang}(\varphi_{,} - mt - g't - 6') = \frac{\left\{\begin{aligned} &P\sin(mt + g't + 6' - lt - I) \\ &+ P'\left(\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} + \frac{1}{2}\right)\sin(mt + g't + 6' - l't - I') \\ &+ P'\left(\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} - \frac{1}{2}\right)\sin(mt + g't + 6' + l't + I') \end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned} &Q - P\cos(mt + g't + 6' - lt - I) \\ &- P'\left(\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} + \frac{1}{2}\right)\cos(mt + g't + 6' - l't - I') \\ &- P'\left(\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} - \frac{1}{2}\right)\cos(mt + g't + 6' + l't + I') \end{aligned}\right\}}.$$

L'angle $\varphi_{,} - mt - g't - 6'$ n'atteindra jamais un angle droit, en plus ou en moins, si le dénominateur de cette fraction est constamment du même signe que Q et ne devient jamais nul; car il est visible que, la tangente de l'angle droit étant infinie, ce dénominateur serait nul au passage de l'angle $\varphi_{,} - mt - g't - 6'$ par l'angle droit. Réciproquement, on voit que si ce dénominateur changeait de signe, il passerait par zéro, ce qui rendrait infinie la tangente de l'angle dont il s'agit, qui deviendrait alors un angle droit; ainsi, les observations faisant voir que cela n'a jamais lieu, il en résulte que le dénominateur précédent est constamment du même signe que Q, et qu'ainsi Q est plus grand que $P + 2P' \sqrt{\frac{A - C}{B - C}}$. De plus, l'angle $\varphi_{,} - mt - g't - 6'$ étant toujours très-petit, suivant les observations, il en résulte que les quantités P et P' sont très-petites par rapport à Q; or l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique vraie est égale à $\sqrt{s_{,}^2 + s_{,}'^2}$; cette inclinaison est donc à très-peu près constante et égale à Q; ainsi le phénomène de la coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire, et celui de la constance de leur inclinaison mutuelle sont liés l'un à l'autre par la théorie de la pesanteur, et les observations qui les donnent simultanément confirment admirablement cette théorie.

Nous avons observé, dans le n° 4, que, relativement à la Terre, les constantes arbitraires dépendantes de l'état initial de son mouvement de rotation sont nulles, ou du moins insensibles par les observations les plus précises. On voit, par ce qui précède et par le n° 15, que le même résultat a lieu pour la Lune, et il est naturel de penser qu'il s'étend à tous les corps célestes. On conçoit, en effet, que, sans les attractions étrangères, toutes les parties de chacun de ces corps, en vertu des frottements et des résistances qu'elles opposent à leurs mouvements réciproques, auraient pris à la longue un état constant d'équilibre, qui ne peut subsister qu'avec un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe invariable: les observations ne doivent donc plus offrir que les résultats dus aux attractions étrangères.

18. Voyons ce qui résulte des recherches précédentes, relativement

à la figure de la Lune. A et B sont plus petits que C; on a vu, dans le n° 16, que B est plus grand que A, et que $\frac{B-A}{C}$ est compris entre les limites zéro et 0,0013876; enfin nous avons trouvé, dans le numéro précédent, que $\frac{C-A}{A}$ est à fort peu près égal à 0,000599 : tels sont les résultats des observations relativement aux trois moments d'inertie A, B, C. Comparons-les à ceux de la théorie de la figure du sphéroïde lunaire.

En substituant pour A, B, C leurs valeurs données dans le n° 2, on aura

$$\frac{B-A}{C} = \frac{15\alpha\int\int\int\rho\, d(a^5 Y^{(2)})\, d\mu\, d\varpi (1-\mu^2)\cos 2\varpi}{8\pi\int\rho\, d.a^5},$$

$$\frac{C-A}{A} = \frac{15\alpha\int\int\int\rho\, d(a^5 Y^{(2)})\, d\mu\, d\varpi[(1-\mu^2)\cos^2\varpi - \mu^2]}{8\pi\int\rho\, d.a^5}.$$

L'attraction de la Terre sur la Lune influe sur la figure de ce satellite et l'allonge dans le sens de l'axe dirigé vers cette planète. En supposant la Lune recouverte d'un fluide en équilibre, et en observant que la Terre peut être supposée dans le plan de son équateur, en prenant enfin pour le premier méridien lunaire où l'on fixe l'origine de l'angle ϖ celui qui passe par le premier et le troisième axe principal, et prenant pour unité le premier demi-axe, on trouvera, par le n° 29 du Livre III,

$$\frac{4\alpha\pi}{5}\int\rho\, d(a^5 Y^{(2)}) = \tfrac{4}{3}\alpha\pi Y^{(2)}\int\rho\, d.a^3 + \frac{g}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - \frac{3L}{2r_,^3}[(1-\mu^2)\cos^2\varpi - \tfrac{1}{3}];$$

g est la force centrifuge d'un point de l'équateur lunaire; cette force, à la distance $r_,$ du centre de la Lune, est égale à $gr_,$, et, puisque le mouvement de rotation de la Lune est égal à son moyen mouvement de révolution, on aura, à très-peu près, $gr_, = \frac{L}{r_,^2}$. Nommons λ' le rapport de la masse L de la Terre à celle de la Lune; nous aurons

$$L = \tfrac{4}{3}\pi\lambda'\int\rho\, d.a^3;$$

on aura, cela posé, en observant que, par le n° **32**, $Y^{(2)}$ est de la forme $-h(\mu^2-\frac{1}{3})+h^{\text{iv}}(1-\mu^2)\cos 2\varpi$,

$$(i)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\int\rho d(a^5 Y^{(2)}) &= \tfrac{5}{3}\left(\alpha h-\frac{5\lambda'}{4r_{\prime}^3}\right)(\tfrac{1}{3}-\mu^2)\int\rho d.a^3 \\ &+\tfrac{5}{3}\left(\alpha h^{\text{iv}}-\frac{3\lambda'}{4r_{\prime}^3}\right)(1-\mu^2)\cos 2\varpi\int\rho d.a^3; \end{aligned}\right.$$

on aura donc

$$\frac{B-A}{C}=\tfrac{10}{3}\left(\alpha h^{\text{iv}}-\frac{3\lambda'}{4r_{\prime}^3}\right)\frac{\int\rho d.a^3}{\int\rho d.a^5},$$

$$\frac{C-A}{A}=\tfrac{5}{3}\left(\alpha h+\alpha h^{\text{iv}}-\frac{2\lambda'}{r_{\prime}^3}\right)\frac{\int\rho d.a^3}{\int\rho d.a^5}.$$

Dans le cas de la Lune homogène, l'équation (i) donne

$$\alpha Y^{(2)}=\tfrac{5}{3}\left(\alpha h-\frac{5\lambda'}{4r_{\prime}^3}\right)(\tfrac{1}{3}-\mu^2)+\tfrac{5}{3}\left(\alpha h^{\text{iv}}-\frac{3\lambda'}{4r_{\prime}^3}\right)(1-\mu^2)\cos 2\varpi;$$

en comparant cette expression à celle-ci

$$\alpha Y^{(2)}=\alpha h(\tfrac{1}{3}-\mu^2)+\alpha h^{\text{iv}}(1-\mu^2)\cos 2\varpi,$$

on aura

$$\alpha h=\frac{25\lambda'}{8r_{\prime}^3},\qquad \alpha h^{\text{iv}}=\frac{15\lambda'}{8r_{\prime}^3}=\tfrac{3}{5}\alpha h.$$

On peut observer ici que $\alpha h+\alpha h^{\text{iv}}$ exprime l'excès du premier demi-axe principal, dirigé vers la Terre, sur le demi-axe du pôle, et que $\alpha h-\alpha h^{\text{iv}}$ exprime l'excès du second demi-axe principal sur le demi-axe du pôle; dans le cas de l'homogénéité ces excès sont $\frac{40\lambda'}{8r_{\prime}^3}$ et $\frac{10\lambda'}{8r_{\prime}^3}$; le premier est donc quadruple du second. On a, dans ce même cas,

$$\frac{B-A}{C}=\frac{15\lambda'}{4r_{\prime}^3},\qquad \frac{C-A}{A}=\frac{5\lambda'}{r_{\prime}^3};$$

$\frac{1}{r_{\prime}}$ est le demi-diamètre apparent de la Lune, dont nous avons pris le demi-diamètre réel pour unité, et, suivant les observations, ce demi-

diamètre est égal à 2912''; ainsi l'on peut supposer $\frac{1}{r_{,}} = \sin 2912''$, ce qui donne

$$\frac{B-A}{C} = 0,0000003618.\lambda', \quad \frac{C-A}{A} = 0,0000004824.\lambda';$$

les conditions de A et de B moindres que C, et de B plus grand que A se trouvent alors remplies. Nous avons vu, dans le Livre IV, que les phénomènes des marées donnent à peu près $\lambda' = 59$, et alors la condition de $\frac{B-A}{C}$ plus petit que 0,0013876 est encore remplie; mais la condition de $\frac{C-A}{A}$ égal à peu près à 0,000599 est bien loin de l'être, et en supposant même $\lambda' = 1000$, elle ne le serait pas; d'où il suit que la Lune n'est pas homogène, ou qu'elle est éloignée d'avoir la figure qu'elle prendrait si elle était fluide.

Dans le cas où la Lune, formée de couches de densités variables, aurait été primitivement fluide et aurait conservé la figure d'équilibre qu'elle a dû prendre alors, il résulte du n° 30 du Livre III que le rayon du sphéroïde lunaire est, comme dans le cas de l'homogénéité, de la forme

$$1 + \alpha h(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + \tfrac{3}{4}\alpha h(1 - \mu^2)\cos 2\varpi,$$

et alors, comme dans le cas de l'homogénéité, l'excès du demi-axe principal dirigé vers la Terre sur le demi-axe du pôle est quadruple de l'excès du second demi-axe principal sur le demi-axe du pôle. L'équation (i) donne

$$\alpha h - \frac{3}{5}\,\frac{\alpha \int \rho\, d(a^5 h)}{\int \rho\, d.a^3} = \frac{5\lambda'}{4 r_{,}^3}.$$

On a vu, dans le numéro cité du Livre III, que les valeurs de h vont en augmentant du centre à la surface, tandis que les densités vont en diminuant, en sorte que l'on peut supposer, à la surface,

$$\int \rho\, d(a^5 h) = (1 - q)\, h \int \rho\, d.a^5,$$

q étant positif; on aura ainsi

$$\alpha h = \frac{\frac{5}{4}\frac{\lambda'}{r_{,}^3}}{1 - \frac{3}{5}(1-q)\frac{\int\rho\, d.a^5}{\int\rho\, d.a^3}}.$$

Présentement on a $h^{\text{IV}} = \frac{3}{5}h$; on aura donc

$$\frac{B-A}{C} = \frac{\frac{3}{2}\frac{\lambda'}{r_{,}^3}(1-q)\int\rho\, d.a^3}{\int\rho\, d.a^3 - \frac{3}{5}(1-q)\int\rho\, d.a^5},$$

$$\frac{C-A}{A} = \frac{\frac{2\lambda'}{r_{,}^3}(1-q)\int\rho\, d.a^3}{\int\rho\, d.a^3 - \frac{3}{5}(1-q)\int\rho\, d.a^5}.$$

Il est facile de voir que le cas de l'homogénéité est celui dans lequel la valeur de $\frac{C-A}{A}$ est la plus grande, puisque, les densités diminuant du centre à la surface, $\int\rho\, d.a^3$ est plus grand que $\int\rho\, d.a^5$; or nous venons de voir que, la Lune étant homogène, la valeur de $\frac{C-A}{A}$ est considérablement moindre que suivant les observations; la Lune n'a donc point la figure d'équilibre qu'elle aurait prise si elle avait été primitivement fluide.

On peut imaginer une infinité d'hypothèses dans lesquelles les moments d'inertie A, B, C satisfont aux conditions précédentes : sans doute les hautes montagnes et les autres inégalités que l'on observe à la surface de la Lune ont sur les différences de ces moments d'inertie une influence très-sensible, et d'autant plus grande que l'aplatissement du sphéroïde lunaire est fort petit et sa masse peu considérable.

19. Il reste à considérer l'influence de l'action du Soleil sur les mouvements de l'équateur lunaire; mais, sans entrer dans la discussion de cette action, il est facile de se convaincre qu'elle est insensible. Car, S exprimant la masse du Soleil et r'' sa distance moyenne à la Lune ou à la Terre, cette action est de l'ordre $\frac{S}{r''^3}$; elle est donc, par

rapport à l'action de la Terre sur la Lune, dans le rapport de $\frac{S}{r''^3}$ à $\frac{L}{r_{,}^3}$: or la théorie des forces centrales donne ce rapport égal au carré du temps de la révolution sidérale de la Lune, divisé par le carré du temps de la révolution sidérale de la Terre, c'est-à-dire égal à $\frac{1}{178}$ environ; on voit donc que l'action du Soleil sur le sphéroïde lunaire peut être négligée par rapport à l'action de la Terre sur le même sphéroïde.

CHAPITRE III.

DES MOUVEMENTS DES ANNEAUX DE SATURNE AUTOUR DE LEURS CENTRES DE GRAVITÉ.

20. En traitant de la figure des anneaux de Saturne, on a vu que chaque anneau est un solide dont le centre de figure coïncide à peu près avec celui de Saturne, mais dont le centre de gravité peut et doit se trouver dans un point différent. Ce centre tourne autour de la planète dans le même temps que l'anneau, et il est aisé de voir que l'anneau tourne autour de son centre de gravité dans le même temps qu'autour de Saturne. L'action du Soleil et des satellites sur ces anneaux doit produire dans leurs plans des mouvements de précession, analogues à ceux de l'équateur de la Terre, et, cette action étant différente pour chacun des anneaux, il semble que ces mouvements doivent être différents, et qu'ainsi les anneaux doivent, à la longue, cesser d'être à peu près dans un même plan, ce qui paraît contraire aux observations; car, quoiqu'il ne se soit pas encore écoulé deux siècles depuis leur découverte, cependant, s'ils n'étaient pas assujettis à se mouvoir dans un même plan, il faudrait supposer qu'ils ont été découverts précisément à l'époque où leurs plans coïncidaient, ce qui est bien peu vraisemblable; il existe donc très-probablement une cause qui les retient dans un même plan fixe ou variable. Mais quelle est cette cause? Sa recherche est l'objet de l'analyse suivante.

21. Nous pouvons encore ici faire usage des équations (D′) du n° 1. Déterminons les valeurs de dN, dN' et dN'', relatives soit à l'action de Saturne sur un anneau, soit à l'action d'un astre éloigné L. Considérons d'abord l'action de Saturne, et nommons V la somme de

toutes les molécules de Saturne divisées par leurs distances respectives à une molécule quelconque dm de l'anneau; soient r' le rayon qui joint cette molécule au centre de Saturne, et μ le cosinus de l'angle que ce rayon forme avec l'axe de rotation de Saturne. Représentons par

$$1 + \alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(3)} + \alpha Y^{(4)} + \ldots$$

le rayon du sphéroïde de Saturne, et par $\alpha\varphi'$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à son équateur; la masse de Saturne étant prise pour unité, on aura, par le n° 35 du Livre III,

$$V = \frac{1}{r'} + \frac{\alpha[Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi'(\mu^2 - \frac{1}{3})]}{r'^3} + \frac{\alpha Y^{(3)}}{r'^4} + \frac{\alpha Y^{(4)}}{r'^5} + \ldots.$$

Cette valeur de V se réduit à peu près à ses deux premiers termes, si r' est un peu grand relativement au rayon du sphéroïde de Saturne, pris ici pour unité de distance. D'ailleurs, si cette planète est un sphéroïde de révolution, comme il est naturel de le supposer, on a $Y^{(3)} = 0$, $Y^{(4)} = 0$, ..., ce qui rend exacte la réduction de V à ses deux premiers termes; on peut donc supposer

$$V = \frac{1}{r'} + \frac{\alpha Y^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha\varphi'(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r'^3}.$$

La fonction $Y^{(2)}$ se réduit, comme on l'a vu dans le n° 2, à cette forme

$$Y^{(2)} = h(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h^{\text{iv}}(1 - \mu^2)\cos 2\varpi.$$

Si Saturne est un solide de révolution, h^{iv} est nul; mais, dans le cas même où cette quantité serait comparable à h, il est facile de s'assurer que son influence sur les mouvements de l'anneau est insensible, à cause de la rapidité du mouvement de rotation de Saturne. Nous supposerons donc $h^{\text{iv}} = 0$, et par conséquent

$$V = \frac{1}{r'} - \frac{(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\varphi')(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r'^3},$$

αh étant évidemment l'aplatissement de Saturne.

Maintenant, x', y', z' étant les coordonnées de la molécule dm rela-

tivement au centre de gravité de l'anneau, on a, par le n° 3,

$$\frac{dN}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{dN'}{dt} = \int dm\left(x'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial x'}\right),$$

$$\frac{dN''}{dt} = \int dm\left(y'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial y'}\right).$$

Pour déterminer V, nous ferons abstraction de la largeur de l'anneau, que nous considérerons ainsi comme une ligne circulaire d'inégale densité dans les diverses parties de sa circonférence, et dont le centre est à très-peu près celui de Saturne. En désignant par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de l'anneau, rapportées au centre de Saturne, $X + x'$, $Y + y'$, $Z + z'$ seront les coordonnées de la molécule dm, rapportées au même centre. Si l'on prend pour le plan des x' et des y' celui de l'équateur de Saturne, que nous supposerons d'abord invariable, on aura

$$r' = \sqrt{(X + x')^2 + (Y + y')^2 + (Z + z')^2}, \qquad \mu = \frac{Z + z'}{r'}.$$

Nommons $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du centre de la circonférence de l'anneau, rapportées au centre de Saturne; ces coordonnées étant supposées assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits par α, on aura

$$r' = r'_{,} + \frac{x_{,}(X + x') + y_{,}(Y + y') + z_{,}(Z + z')}{r'_{,}},$$

$r'_{,}$ étant le rayon de la circonférence de l'anneau; si l'on observe ensuite que l'on a, par la nature du centre de gravité de l'anneau, $\int x'dm = 0$, $\int y'dm = 0$, $\int z'dm = 0$, on aura

$$\frac{dN}{dt} = 0,$$

$$\frac{dN'}{dt} = -\frac{2\alpha(h - \frac{1}{2}\varphi')}{r'^{5}_{,}}\int x'z'dm,$$

$$\frac{dN''}{dt} = -\frac{2\alpha(h - \frac{1}{2}\varphi')}{r'^{5}_{,}}\int y'z'dm.$$

50.

Concevons que l'inclinaison θ du plan de l'anneau sur le plan de l'équateur soit très-petite, en sorte que l'on puisse négliger son carré, ce qui revient à supposer $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$; prenons ensuite pour l'axe des x' l'intersection même du plan de l'anneau avec celui de l'équateur de Saturne; cela posé, les valeurs de x', y', z' du n° **26** du Livre I deviendront

$$x' = x''\cos\varphi - y''\sin\varphi,$$
$$y' = x''\sin\varphi + y''\cos\varphi + z''\theta,$$
$$z' = z'' - y''\theta\cos\varphi - x''\theta\sin\varphi,$$

d'où l'on tirera, par le même numéro,

$$\frac{dN}{dt} = 0,$$
$$\frac{dN'}{dt} = \frac{\alpha(h - \frac{1}{3}\varphi')}{r_{\prime}'^{3}}(B - A)\theta\sin 2\varphi,$$
$$\frac{dN''}{dt} = -\frac{\alpha(h - \frac{1}{3}\varphi')}{r_{\prime}'^{3}}(A + B - 2C)\theta - \frac{\alpha(h - \frac{1}{3}\varphi')}{r_{\prime}'^{3}}(B - A)\theta\cos 2\varphi.$$

Considérons présentement les valeurs de $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$, relatives à l'action d'un astre quelconque L, éloigné de l'anneau. En nommant X'', Y'', Z'' les trois coordonnées de cet astre, rapportées au centre de gravité de l'anneau et parallèles à ses trois axes principaux, et r'' sa distance à ce point, on aura, par le n° **3**, en rapportant les valeurs de dN, dN' et dN'' aux mêmes coordonnées,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}}(B - A)X''Y'',$$
$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}}(C - A)X''Z'',$$
$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}}(C - B)Y''Z''.$$

Nous pouvons supposer sans erreur sensible, dans ces expressions, que l'origine des coordonnées X'', Y'', Z'' est au centre même de Saturne,

ainsi que l'origine de r''. Nommons X', Y', Z' les coordonnées de l'astre L, rapportées au plan de l'équateur de Saturne, l'axe des X' étant la ligne d'intersection du plan de l'équateur et de celui de l'anneau; on aura, entre X', Y', Z', X'', Y'', Z'', les mêmes relations que les précédentes entre x', y', z', x'', y'', z'', d'où l'on tire

$$X'' = X'\cos\varphi + Y'\sin\varphi - \theta Z'\sin\varphi,$$
$$Y'' = Y'\cos\varphi - X'\sin\varphi - \theta Z'\cos\varphi,$$
$$Z'' = Z' + \theta Y',$$

et par conséquent,

$$X''Y'' = \frac{Y'^2 - X'^2}{2}\sin 2\varphi + X'Y'\cos 2\varphi - \theta Z'(Y'\sin 2\varphi + X'\cos 2\varphi),$$
$$X''Z'' = Z'Y'\sin\varphi + Z'X'\cos\varphi + \theta[(Y'^2 - Z'^2)\sin\varphi + X'Y'\cos\varphi],$$
$$Y''Z'' = Z'Y'\cos\varphi - Z'X'\sin\varphi + \theta[(Y'^2 - Z'^2)\cos\varphi - X'Y'\sin\varphi].$$

Nommons v l'angle que le rayon r'' forme avec la ligne d'intersection de l'orbite de L et de l'équateur de Saturne; soient ψ l'angle que l'intersection du plan de l'anneau et de l'équateur forme avec cette intersection, et θ' l'inclinaison de l'orbite de L sur le plan de l'équateur de Saturne; on aura

$$X' = r''\cos v\cos\psi - r''\sin v\cos\theta'\sin\psi,$$
$$Y' = r''\sin v\cos\theta'\cos\psi + r''\cos v\sin\psi,$$
$$Z' = r''\sin v\sin\theta',$$

ce qui donne, en négligeant les termes dépendants des sinus et cosinus de l'angle v et de ses multiples, et ceux qui dépendent de l'angle 2φ, tous ces termes restant insensibles par les intégrations,

$$X''Y'' = 0,$$
$$X''Z'' = \frac{r''^2}{2}\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi - \psi) + \frac{r''^2\theta}{2}(\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\sin\varphi - \frac{r''^2}{4}\theta\sin^2\theta'\sin(\varphi - 2\psi),$$
$$Y''Z'' = \frac{r''^2}{2}\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi - \psi) + \frac{r''^2\theta}{2}(\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\cos\varphi - \frac{r''^2}{4}\theta\sin^2\theta'\cos(\varphi - 2\psi).$$

On aura donc, par l'action de l'astre L,

$$\frac{dN}{dt}=0,$$

$$\frac{dN'}{dt}=\frac{3L}{2r''^3}(C-A)\left[\begin{array}{l}\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi-\psi)+(\cos^2\theta'-\frac{1}{2}\sin^2\theta')\,\theta\sin\varphi\\ -\frac{1}{2}\theta\sin^2\theta'\sin(\varphi-2\psi)\end{array}\right],$$

$$\frac{dN''}{dt}=\frac{3L}{2r''^3}(C-B)\left[\begin{array}{l}\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi-\psi)+(\cos^2\theta'-\frac{1}{2}\sin^2\theta')\,\theta\cos\varphi\\ -\frac{1}{2}\theta\sin^2\theta'\cos(\varphi-2\psi)\end{array}\right].$$

On doit observer ici que ces valeurs de $\frac{dN'}{dt}$ et de $\frac{dN''}{dt}$ se rapportent au plan même de l'anneau et à ses axes principaux, au lieu que les valeurs précédentes, relatives à l'action de Saturne, se rapportent au plan de l'équateur de Saturne; il faut donc, en substituant dans les équations (D') du n° 1 les expressions précédentes relatives à l'action de Saturne, supposer dans ces équations $\sin\theta=\theta$ et $\cos\theta=1$, à cause de la petitesse de θ, dont nous négligeons le carré; mais, en substituant dans les mêmes équations les valeurs précédentes de $\frac{dN'}{dt}$ et $\frac{dN''}{dt}$ relatives à l'action de l'astre L, il faut supposer auparavant dans ces équations $\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=1$; on aura donc, en réunissant toutes ces valeurs,

$$\frac{dp}{dt}+\frac{B-A}{C}qr=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}+\frac{C-B}{A}rp=\;&\frac{2\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi')}{r_{\prime}'^{5}}\frac{C-B}{A}\theta\cos\varphi\\ &+\frac{3L}{2r''^3}\frac{C-B}{A}(\cos^2\theta'-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\,\theta\cos\varphi\\ &+\frac{3L}{2r''^3}\frac{C-B}{A}[\sin\theta'\cos\theta'\cos(\varphi-\psi)-\tfrac{1}{2}\theta\sin^2\theta'\cos(\varphi-2\psi)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}+\frac{A-C}{B}pq=\;&\frac{2\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi')}{r_{\prime}'^{5}}\frac{A-C}{B}\theta\sin\varphi\\ &+\frac{3L}{2r''^3}\frac{A-C}{B}(\cos^2\theta'-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta')\,\theta\sin\varphi\\ &+\frac{3L}{2r''^3}\frac{A-C}{B}[\sin\theta'\cos\theta'\sin(\varphi-\psi)-\tfrac{1}{2}\theta\sin^2\theta'\sin(\varphi-2\psi)];\end{aligned}$$

r et q étant supposés très-petits, nous pouvons négliger le produit $\frac{B-A}{C} rq$, ce qui donne $\frac{dp}{dt} = 0$, ou p constant. Nous ferons ensuite, comme dans le n° 17,

$$\theta \sin \varphi = s, \quad \theta \cos \varphi = s',$$

ce qui donne par le numéro cité

$$r = \frac{ds}{dt} - ps', \quad q = -\frac{ds'}{dt} - ps.$$

En substituant ces valeurs dans les équations différentielles précédentes en q et r, elles deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &+ \frac{C-B-A}{B} p \frac{ds'}{dt} + \frac{C-A}{B} \varepsilon^2 s \\ &= \frac{3L}{2r''^3} \frac{A-C}{B} [\sin\theta' \cos\theta' \sin(\varphi - \psi) - \tfrac{1}{2}\theta \sin^2\theta' \sin(\varphi - 2\psi)], \\ \frac{d^2 s'}{dt^2} &- \frac{C-B-A}{A} p \frac{ds}{dt} + \frac{C-B}{A} \varepsilon^2 s' \\ &= \frac{3L}{2r''^3} \frac{B-C}{A} [\sin\theta' \cos\theta' \cos(\varphi - \psi) - \tfrac{1}{2}\theta \sin^2\theta' \cos(\varphi - 2\psi)], \end{aligned}$$

ε^2 étant égal à

$$p^2 + \frac{2\alpha(h - \frac{1}{2}\varphi')}{r_{\prime}'^5} + \frac{3L}{2r''^3} (\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta').$$

Les équations précédentes se simplifient en observant que, dans le cas présent, on a, par le n° 26 du Livre I, $A + B = C$, ce qui réduit ces équations aux suivantes, en négligeant dans leurs seconds membres les termes multipliés par θ,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \varepsilon^2 s = -\frac{3L}{2r''^3} \sin\theta' \cos\theta' \sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + \varepsilon^2 s' = -\frac{3L}{2r''^3} \sin\theta' \cos\theta' \cos(\varphi - \psi).$$

Si l'on considère l'orbite de L comme invariable, on aura, par le n° 4,

$$d\varphi - d\psi = p\, dt,$$

et par conséquent,

$$\varphi - \psi = pt + \mathrm{I},$$

I étant une arbitraire; les équations différentielles en s et s' donneront ainsi, en les intégrant,

$$s = \mathrm{M}\sin(\varepsilon t + \mathrm{E}) - \frac{\frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}\sin\theta'\cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2}\sin(\varphi - \psi),$$

$$s' = \mathrm{M}'\cos(\varepsilon t + \mathrm{E}') - \frac{\frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}\sin\theta'\cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2}\cos(\varphi - \psi),$$

M, E, M′, E′ étant quatre arbitraires. L'inclinaison du plan de l'anneau à celui de l'équateur de Saturne est égale à $\sqrt{s^2 + s'^2}$; il faut donc, pour que cette inclinaison reste toujours très-petite, que M et M′ soient très-petits et que le coefficient $\frac{\frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}\sin\theta'\cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2}$ soit peu considérable; or cela n'aurait pas lieu si Saturne était parfaitement sphérique, car alors on aurait

$$\varepsilon^2 - p^2 = \frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}(\cos^2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta'),$$

et le coefficient précédent deviendrait $\frac{\sin\theta'\cos\theta'}{\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\sin^2\theta'}$; il serait par conséquent très-sensible.

Si Saturne est aplati en vertu d'un mouvement de rotation, ce coefficient devient

$$\frac{\frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}\sin\theta'\cos\theta'}{\frac{2\alpha(h - \frac{1}{2}\varphi')}{r_i'^5} + \frac{3\mathrm{L}}{2r''^3}(\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\sin^2\theta')};$$

supposons que L soit le Soleil, et que r_i soit la distance du centre de Saturne à son dernier satellite; nommons T la durée d'une révolution sidérale de Saturne, et T′ celle d'une révolution sidérale de son dernier satellite; la masse de Saturne étant prise pour unité, on a, par le n° 25 du Livre II,

$$\frac{\mathrm{L}}{r''^3} = \frac{1}{r_i^3}\left(\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\right)^2,$$

ce qui change le coefficient précédent dans celui-ci

$$\frac{\frac{3r_{,}'^{5}}{4r_{,}^{3}}\left(\frac{T'}{T}\right)^{2}\sin\theta'\cos\theta'}{\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi')+\frac{3r_{,}'^{5}}{4r'^{3}}\left(\frac{T'}{T}\right)^{2}(\cos^{2}\theta'-\frac{1}{2}\sin^{2}\theta')}.$$

Les observations donnent, le demi-diamètre de Saturne étant pris pour unité,

$$\begin{aligned} T &= 10759^{j},08, \\ T' &= 79^{j},3296, \\ r_{,} &= 59,154, \\ \theta' &= 33^{\circ}. \end{aligned}$$

Nous supposerons ensuite $r_{,}' = 2$, ce qui diffère peu de la vérité; on aura ainsi le coefficient dont il s'agit, réduit en secondes, égal à

$$\frac{0'',001727}{\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi')+0,0000000039824}.$$

On voit que ce coefficient, qui serait très-considérable si $\alpha(h-\frac{1}{2}\varphi')$ était nul, devient très-petit et insensible lorsque cette quantité a une valeur sensible. Alors l'action de Saturne retient l'anneau toujours à peu près dans le plan de son équateur; ainsi les divers anneaux de Saturne sont par là maintenus dans un même plan. Telle est donc la cause de ce phénomène, qui m'avait fait reconnaître le mouvement de rotation de Saturne avant que l'observation de ses taches l'eût fait apercevoir.

22. Il est facile de voir, par l'analyse précédente, que l'action du cinquième satellite de Saturne ne doit point sensiblement écarter d'un même plan les divers anneaux de cette planète. Quant à l'action mutuelle des anneaux et à celle des satellites de Saturne, qui se meuvent à très-peu près dans leur plan, il est visible qu'elles ne peuvent pas altérer leur coïncidence.

Un anneau pouvant être considéré comme une réunion de satellites, on conçoit que l'action de l'équateur de Saturne, qui maintient dans

son plan ceux de ses divers anneaux, doit, par la même raison, maintenir dans ce même plan les orbites des satellites situées primitivement dans ce plan. Réciproquement, si les divers satellites d'une planète se meuvent dans un même plan fort incliné à celui de son orbite, on peut en conclure qu'ils y sont maintenus par l'action de son équateur, et qu'ainsi cette planète a un mouvement de rotation autour d'un axe à peu près perpendiculaire au plan des orbites de ses satellites. On peut donc affirmer que la planète Uranus, dont tous les satellites se meuvent dans un même plan presque perpendiculaire à l'écliptique, tourne sur elle-même autour d'un axe très-peu incliné à l'écliptique.

Les termes de l'expression de θ qui dépendent des actions du Soleil et du dernier satellite de Saturne étant insensibles, et les dimensions de l'anneau n'entrant point dans les autres termes, il est clair que, si plusieurs anneaux concentriques sont fixement attachés ensemble et se meuvent à peu près dans le plan de l'équateur de Saturne, l'action du Soleil et du dernier satellite ne les en écartera pas sensiblement; ainsi ce résultat, que nous avons trouvé pour un anneau, en faisant abstraction de sa largeur, a également lieu pour un anneau d'une largeur quelconque.

La seule partie de l'expression de θ qui puisse être sensible dépendant de coefficients arbitraires et étant indépendante de la position de l'équateur de Saturne relativement à son orbite et à celle de son dernier satellite, il en résulte que cet équateur, dans le mouvement très-lent que l'action du Soleil et de ce satellite lui imprime, emporte avec lui les plans de ses anneaux et des orbites des satellites primitivement situées dans ce plan. C'est ainsi que nous avons vu, dans le n° 17, que le plan de l'écliptique, dans son mouvement séculaire, entraîne les plans de l'équateur et de l'orbite lunaire, de manière à rendre constantes l'inclinaison mutuelle de ces trois plans et la coïncidence de leurs intersections.

FIN DU TOME DEUXIÈME ET DE LA PREMIÈRE PARTIE.

2061 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.



